



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET
D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes
de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies
Filière : Automatique
Spécialité : Automatique et Systèmes

Présenté par

Tacfarinas CHERROU

Thème

Contrôleur PID d'ordre fractionnaire basé sur la
fonction idéale de Bode

Mémoire soutenu le/.. / 2025 devant le jury composé de :

M Prénom NOM
Grade, Lieu d'exercice, Président

Mme Karima AMOURA
Grade, Lieu d'exercice, Encadrant

M Prénom NOM
Grade, Lieu d'exercice, Co-Encadrant

M Prénom NOM
Grade, Lieu d'exercice, Examineur

M Prénom NOM
Grade, Lieu d'exercice, Examineur

Table des matières

Introduction Générale	1
I Simulation des systèmes d'ordre fractionnaires	3
I.1 Introduction	3
I.2 Systèmes d'ordre fractionnaires	4
I.2.1 Opérateurs différentiels fractionnaires	4
I.2.2 Dérivateur généralisé	5
I.2.3 Méthodes d'approximation	5
I.2.4 Méthode de Charef	6
I.2.5 Méthode d'Oustaloup	8
I.2.6 Interprétation	11
I.2.7 Procédure d'implémentation de s^α	11
I.3 Exemple	12
I.4 Fonction idéale de Bode	14
I.4.1 Fonction de transfert idéale de Bode en boucle Fermée	15
I.4.2 Étude de La Fonction de transfert idéale de Bode en boucle fermée	16
I.4.3 Robustesse de la fonction idéale de Bode	17
I.4.4 Performances du modèle fractionnaire $L(s)$:	18
I.5 Conclusion	20
II Contrôleur PID Classique et PID Fractionnaire	21
II.1 Introduction	21
II.2 PID classique	22
II.2.1 Différentes structures du PID	23
II.3 PID d'orde fractionnaire	25

II.3.1	Définition	25
II.3.2	Différents types du PID fractionnaire	25
II.4	Méthodes de réglages du PID et FOPID	28
II.5	Méthodes d'optimisation	28
II.5.1	SQP(programmation quadratique séquentielle)[20] :	29
II.5.2	Algorithme simplexe de Nelder-Mead[22]	30
II.6	Exemple d'illustration	31
II.7	Conclusion	33
III	Contrôle de vitesse des véhicules électriques	34
III.1	Introduction	34
III.2	Définition d'un véhicule électrique	35
III.3	Mode de fonctionnement d'un VE	35
III.3.1	Types de véhicules électriques	35
III.3.2	Véhicules hybrides	36
III.4	Spécifications fonctionnelles et techniques du système de commande de vitesse .	36
III.4.1	Fonctionnement du système	37
III.5	Modélisation du véhicule hybride	38
III.5.1	Linéarisation autour du Point de Fonctionnement	40
III.5.2	Analyse de la commandabilité et de l'observabilité	41
III.6	Contrôle de la vitesse du véhicule électrique avec un PID classique	43
III.7	Contrôle de la vitesse du véhicule électrique avec un FOPID	45
III.8	Test de robustesse	48
III.9	Conclusion	49
	Conclusion Générale	50

Table des figures

I.1	Diagramme asymptotique de Bode de $H(s)$ et sont approximation	6
I.2	Tracé de Bode du derivateur généralisé et son approximé	9
I.3	Diagramme asymptotique de Bode de $D_{\text{gen}}(s)$ et $D_N(s)$	9
I.4	Diagrammes de bode du derivateur et de son approximé pour différentes valeurs de α et N	11
I.5	Réponse frequentiel de la fonction idéale de Bode.	15
I.6	Représentation de la fonction idéale de Bode en BF.	15
I.7	Réponse indicielle pour différentes valeurs de λ	16
I.8	Réponse indicielle de la fonction idéale de bode pour différentes valeurs de τ_c . . .	17
I.9	Tracé de Bode de $F(s)$ avec des gains différents.	18
II.1	Structure parallèle d'un PID	23
II.2	Structure série d'un PID	24
II.3	Structure mixte d'un PID	24
II.4	Structure d'un PID fractionnaire	26
II.5	Structure d'un FOPID avec filtre	27
II.6	Structure d'un FOFPID	27
II.7	Comparaison entre le PID et le FOPID	32
III.1	Composants d'un VE	35
III.2	Système de contrôle électronique du papillon	37
III.3	Schéma de simulation de la commande d'un VE avec un PID	43
III.4	Réponse indicielle du VE avec le PID classique	44
III.5	schéma de simulation avec le FOPID	46
III.6	Réponse indicielle du VE	47
III.7	Comparaison entre le PID et le FOPID avec le modèle de référence	47

III.8 Réponse du système face à la perturbation avec le FOPID	48
III.9 Réponse du système face à la perturbation avec le PID classique	49

Liste des tableaux

I.1	Comparaison entre les méthodes d'approximation de Charef et d'Oustaloup. . .	12
II.1	Paramètres de référence et d'approximation du FOPID	31
II.2	Valeurs des paramètres PID et FOPID	32
III.1	Paramètres de réponse temporelle du système optimisé	45
III.2	Paramètres optimaux du contrôleur FOPID et performances temporelles du sys- tème	46

Liste des Symboles

Symboles Généraux et Mathématiques

s	Variable de Laplace (opérateur de dérivation)
t	Temps (s)
j	Unité imaginaire ($j^2 = -1$)
ω	Pulsation (rad/s)
ω_c	Fréquence de coupure ou de référence (rad/s)
$\Gamma(\cdot)$	Fonction Gamma d'Euler
$\int$	Opérateur intégral
$\frac{d}{dt}$	Opérateur de dérivation par rapport au temps
$H(s), G(s), C(s), L(s), F(s)$	Fonctions de transfert
K	Gain général
N	Nombre de cellules (pôles/zéros) dans les approximations
$e(t)$	Signal d'erreur ($e(t) = r(t) - y(t)$)
$u(t)$	Signal de commande (sortie du contrôleur)
$r(t)$	Consigne (référence)
$y(t)$	Sortie du système

Chapitre I : Systèmes d'Ordre Fractionnaire

$\mathcal{D}^\alpha$	Opérateur de dérivée/intégrale fractionnaire d'ordre α
$\alpha, \beta, \gamma, \nu, \lambda$	Ordres fractionnaires (exposants réels)
n	Ordre entier (dans les définitions Riemann-Liouville et Caputo)
ω_l	Fréquence basse de la bande d'approximation (rad/s)
ω_h	Fréquence haute de la bande d'approximation (rad/s)
ω_{z_k}	Fréquence du $k^{\text{ième}}$ zéro
ω_{p_k}	Fréquence du $k^{\text{ième}}$ pôle
r	Rapport géométrique entre pôles et zéros (méthode de Charef)
τ_c	Constante de temps de la fonction idéale de Bode ($\tau_c = 1/\omega_c$)
ϕ_m	Marge de phase (rad ou deg)
ξ	Coefficient d'amortissement
ω_n	Pulsation naturelle (rad/s)
ω_r	Pulsation de résonance (rad/s)
M_r	Facteur de résonance
M_p	Dépassement (Overshoot) (%)
T_s	Temps de stabilisation (s)
Q	Facteur de qualité

Chapitre II : Contrôleurs PID et FOPID

K_p	Gain proportionnel
K_i	Gain intégral ($K_i = K_p/T_i$)
K_d	Gain dérivé ($K_d = K_p \cdot T_d$)
T_i	Constante de temps intégrale (s)
T_d	Constante de temps dérivée (s)
N_f	Facteur de filtrage du terme dérivé
β	Ordre de l'intégration fractionnaire
μ	Ordre de la dérivation fractionnaire
τ_f	Constante de temps d'un filtre (s)
IAE	Integral of Absolute Error ($\int_0^T e(t) dt$)
ITAE	Integral of Time-weighted Absolute Error ($\int_0^T t e(t) dt$)
x	Vecteur des paramètres à optimiser
$f(x)$	Fonction objectif à minimiser
H_k	Approximation de la matrice Hessienne (algorithme SQP)
x_0	Centroïde (algorithme Nelder-Mead)
x_h	Pire point du simplexe (algorithme Nelder-Mead)
x_l	Meilleur point du simplexe (algorithme Nelder-Mead)
x_r, x_e, x_c	Points réfléchi, expansé et contracté (algorithme Nelder-Mead)
δ	Coefficient de réflexion (algorithme Nelder-Mead)

Chapitre III : Contrôle de Vitesse des Véhicules Électriques

v	Vitesse du véhicule (m/s)
θ	Position du papillon des gaz (commande)
F_e	Force générée par le moteur (N)
F_{e1}	Force intermédiaire liée à la position du papillon (N)
F_g	Force due à la gravité (pente) (N)
m	Masse du véhicule (kg)
α_t	Coefficient de traînée aérodynamique (N/(m/s) ²)
γ_m	Coefficient de force du moteur (N)
τ_e	Constante de temps du moteur (s)
F_1	Force au ralenti (N)
g	Accélération de la pesanteur (9.81 m/s ²)
β	Angle de la pente (rad)
μ_f	Coefficient de frottement pneus/route (sans dimension)
ρ	Densité de l'air (kg/m ³)
C_d	Coefficient de traînée
A_s	Surface frontale du véhicule (m ²)
b_w	Coefficient d'amortissement mécanique (N·s/m)
r_{tire}	Rayon du pneumatique (m)
F_{roll}	Force de roulement (N)
F_{drag}	Force de traînée aérodynamique (N)
F_{damp}	Force d'amortissement (N)
A	Matrice d'état
B	Matrice de commande
C	Matrice d'observation
D	Matrice de transmission directe
x	Vecteur d'état ($x = [v, F_e]^T$)
u	Vecteur de commande ($u = \theta$)
y	Vecteur de sortie ($y = v$)
$G_v(s)$	Fonction de transfert du véhicule ($V(s)/\Theta(s)$)
$T_{\text{ref}}(s)$	Modèle de référence (fonction idéale de Bode en boucle fermée)

Introduction Générale

Le régulateur PID (proportionnal, dérivée, intégral) est sans doute le moyen de commande de système le plus utilisé dans l'industrie. Desborough et Miller rapportent que plus de 97% des contrôleurs sont des régulateurs PID [3]. Ceci grâce à sa capacité de bien contrôler une large gamme de processus ainsi que son efficacité et sa simplicité qui permet d'avoir un meilleur rapport qualité/prix. Cependant, ce dernier reste un outil limité et incapable de couvrir tous les besoins de performance dans certains cas de processus industriels complexes. En effet, contrôler les systèmes dynamiques devient de plus en plus compliqué. Avec l'évolution des technologies et les difficultés rencontrés dans ces systèmes, il est devenu obligatoire d'avoir de nouveau moyen de modélisation et de commande pouvant prendre en considération les dynamiques, les incertitudes et les contraintes de performances [2]. Depuis les années soixante l'apparition des contrôleurs fractionnaires a permis d'améliorer les performances des systèmes de commande notamment leur robustesse vis-à-vis des variations des paramètres du système à commander. En effet, la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) développée par Oustaloup et son équipe [29] et le contrôleur $PI^{\beta}D^{\mu}$ proposé par Podlubny [10], ont montré la supériorité des contrôleurs fractionnaires par rapport aux contrôleurs entiers classiques. Le PID fractionnaire possède deux degrés de liberté supplémentaires (les paramètres β et μ), ce qui offre une flexibilité accrue pour trouver un compromis entre précision rapidité et robustesse [37]. Cependant, le réglage de ces contrôleurs s'avère très complexe, comparant aux contrôleurs PID classique, notamment les ordres non entiers qui ne sont pas faciles à déterminer [36]. La robustesse est sans doute la propriété la plus recherchée dans un système de commande. Imaginée par Bode au milieu des années 1940 [11], la fonction de transfert idéale de Bode permet d'assurer des performances robustes invariantes vis-à-vis des variations du gain de la boucle ouverte. La fonction de transfert en boucle fermée correspondante à la fonction idéale de Bode est : $f(s) = \frac{1}{1+\tau_c s^{\lambda+1}}$. Elle présente des caractéristiques temporelles semblables à celles d'un modèle du second ordre sinusoïdal amorti mais dont le dépassement ne dépend que de

l'ordre et le temps de réponse ne dépend que de la constante de temps . C'est pour cette raison, qu'elle est considérée comme un modèle de référence par la plupart des stratégies de commande fractionnaire[31].

Le domaine des véhicules électriques est un domaine d'application idéal pour tester et valider les techniques de commandes avancées. Contrôler la vitesse d'un véhicule reste un défi majeur, puisqu'il doit y avoir un compromis entre performance énergétique, sécurité et confort [?].

Notre travail consiste à déterminer un contrôleur FOPID optimal (les paramètres sont calculés en utilisant des méthodes d'optimisations basées sur la minimisation d'un critère d'erreur) en imposant à la boucle fermée un comportement fractionnaire robuste similaire à celui de la fonction idéale de Bode en boucle fermée. La loi de commande est testée pour la commande de la vitesse d'un véhicule électrique. Ainsi, ce mémoire se divise en trois chapitres

Le chapitre I est consacré aux généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire. Nous avons présenté les opérateurs différentiels selon Riemann-Liouville et Caputo, ainsi que les méthodes d'approximation de Charef et celle d'Oustaloup. Nous avons terminé ce chapitre par une étude brève de la fonction idéal de Bode (caractéristiques) en boucle ouverte et en boucle fermée.

Dans le chapitre II, nous avons traité les contrôleurs PID et FOPID. Nous avons décrit d'abord le contrôleur PID classique, son fonctionnement et ses limites puis le contrôleur PID d'ordre fractionnaire. Nous avons présenté les différentes structures possibles, les méthodes de réglage des paramètres du contrôleur, à savoir les méthodes d'optimisation basées sur la minimisation d'un critère d'erreur. Le chapitre est clôturé avec un exemple d'application où on a comparé les performances des deux contrôleurs.

Le chapitre III présente une application des commandes calculées (PID et FOPID) pour la commande de la vitesse d'un véhicule électrique. L'objectif est de tester les performances et la robustesse du contrôleur FOPID et les valider en les comparant avec celles obtenues avec le contrôleur PID classique.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus dans ce travail ainsi qu'une perspective de travaux futurs.

Chapitre I

Simulation des systèmes d'ordre fractionnaires

I.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est un domaine qui traite des dérivées et des intégrales d'ordre non entier. Aujourd'hui, avec l'avancée de la science et le développement de l'outil informatique, l'intérêt de dérivation et d'intégration d'ordre non entier ne cesse de grandir notamment dans le domaine de l'automatique pour la modélisation, l'identification et la commande des systèmes.

Dans le domaine du contrôle, les systèmes d'ordre fractionnaire apportent un vrai plus. Un bon exemple, c'est l'utilisation de la fonction idéale de Bode [7]. En raison de ses caractéristiques intéressantes elle sert souvent de référence pour ajuster les contrôleurs PID fractionnaires [13]. Ce type de contrôleur offre une meilleure robustesse et performance, lorsque les conditions changent ou que le système est complexe.

Ce chapitre a pour but de se familiariser avec l'univers des systèmes d'ordre fractionnaire. On y verra certains fondements clés, les différentes méthodes d'approximation des dérivateurs notamment la méthode de Charef [2], celle d'Oustaloup qui sont largement utilisées, pour la simulation des systèmes d'ordre fractionnaires [8].

I.2 Systèmes d'ordre fractionnaires

Un système d'ordre fractionnaire est décrit par une équation différentielle impliquant des dérivées fractionnaires :

$$a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} y(t) + \cdots + a_1 \mathcal{D}^{\alpha_1} y(t) = b_m \mathcal{D}^{\beta_m} u(t) + \cdots + b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t), \quad (\text{I.1})$$

où $\mathcal{D}^\alpha$ représente l'opérateur de dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$, défini au sens de Riemann-Liouville ou Caputo [1, 10]. Ces formalismes capturent des dynamiques non exponentielles, comme les relaxations en loi de puissance.

I.2.1 Opérateurs différentiels fractionnaires

- **Définition :** Un opérateur fractionnaire généralise les dérivées et intégrales classiques à des ordres réels. Formellement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:
 - Si $\alpha > 0$: Dérivation d'ordre α .
 - Si $\alpha < 0$: Intégration d'ordre $|\alpha|$.
- **Définition mathématique :** Cette généralisation s'appuie sur l'opérateur fractionnaire (I.2), qui unifie dérivées et intégrales, défini selon les formalismes de Riemann-Liouville [10] et Caputo [1].

$${}_t \mathcal{D}_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0, \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases}, \quad (\text{I.2})$$

- **Dérivée de Riemann-Liouville** [10] :

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \quad (n - 1 < \alpha < n). \quad (\text{I.3})$$

- **Dérivée de Caputo** [1] :

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \quad (n - 1 < \alpha < n). \quad (\text{I.4})$$

Ou : La fonction (γ) est une généralisation aux nombres réels de la fonction factorielle définie,

pour les nombres entiers positifs, elle est donnée par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx$$

I.2.2 Dérivateur généralisé

Le dérivateur généralisé est un opérateur linéaire noté s^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), généralisant la dérivation ($\alpha > 0$) et l'intégration ($\alpha < 0$). Une variante courante inclut une fréquence de normalisation ω_c pour adapter l'opérateur à des applications pratiques est donné par l'équation [10] :

$$D_{\text{gen}}(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{I.5})$$

où ω_c est une fréquence de coupure permettant d'éviter les singularités aux basses fréquences et d'ajuster l'échelle fréquentielle [2].

Dans le domaine fréquentiel, sa réponse devient :

$$D_{\text{gen}}(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_c} \right)^\alpha = \left| \frac{\omega}{\omega_c} \right|^\alpha e^{j\alpha\pi/2}. \quad (\text{I.6})$$

Cette forme préserve les propriétés clés :

- Un gain en $\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^\alpha$ [11],
- Une phase constante de $\alpha\pi/2$ [8].

Cette caractéristique fréquentielle rend sa réalisation physique complexe. Pour l'implémenter, on utilise des approximations à bande limitée telles que :

- La méthode récursive de Charef [3]
- L'approximation fractionnaire d'Oustaloup [8]

I.2.3 Méthodes d'approximation

Le dérivateur généralisé (s^α) constitue l'élément principal pour la synthèse des systèmes fractionnaires, c'est pourquoi l'approximation de ces derniers passe nécessairement par celle du dérivateur généralisé. Plusieurs méthodes d'approximation sont proposées dans la littérature, les plus utilisées dans le domaine continu sont : la méthode de Charef et la méthode d'Oustaloup [10]. Les deux méthodes ont le même principe, à savoir déterminer les zéros et les pôles d'une

fonction de transfert d'ordre entier en utilisant un simple calcul géométriques sur une bande de fréquences donnée.

I.2.4 Méthode de Charef

Cette approche par réponse en fréquence équivalente utilise une cascade de pôles et zéros pour reproduire la pente α sur une plage limitée. Comme le montre la figure . La fonction de transfert approchée est donnée par l'équation (I.7) [2] :

$$H_{\text{Charef}}(s) = K \prod_{k=1}^N \frac{1 + s/\omega_{z_k}}{1 + s/\omega_{p_k}}, \quad (\text{I.7})$$

où :

- ω_{z_k} et ω_{p_k} sont espacés géométriquement pour obtenir une pente de 20α dB/décade [3],
- $K = \omega_c^\alpha$ ajuste le gain à la fréquence coupure ω_c .
- ε est l'erreur d'approximation qui représente l'écart maximal entre la ligne d'approximation en zigzag et la droite de pente -20α dB/dec comme le montre la figure I.1.

ω_{z_k} et ω_{p_k} sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert d'ordre entier, et ω_{p_0} est le premier pôle.

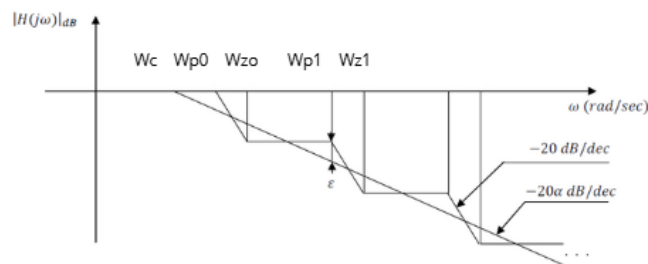


FIGURE I.1 – Diagramme asymptotique de Bode de $H(s)$ et son approximation

I.2.4.1 Étape d'approximation

1. Modélisation de la fonction fractionnaire

on suppose que la fonction à approximer est de la forme suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

Dans le domaine fréquentiel ($s = j\omega$), la fonction présente une **pente de -20α dB/décade** sur un diagramme de Bode.

2. Approximation par une fonction rationnelle

On peut approximer $H(s)$ en utilisant la méthode de Charef avec une fonction rationnelle d'ordre N :

$$H_{\text{approx}}(s) = K \frac{\prod_{k=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_k}}\right)}{\prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{s}{\omega_{p_k}}\right)}$$

où :

- ω_{z_k} : Fréquences des zéros, (N-1 zéros)
- ω_{p_k} : Fréquences des pôles, (N pôles)
- K : Gain d'ajustement.
- $K = 1$ (Condition essentielle pour une approximation plus fidèle)

3. Distribution récursive des pôles et zéros

L'essence de cette méthode se trouve dans l'agencement géométrique des pôles et des zéros afin de recréer la pente fractionnaire. Les fréquences de coupure avancent selon une progression géométrique. :

- Fréquence du premier pôle $\omega_{p_0} = \omega_{\min} \sqrt{b}$
- paramètres géométrique :

$$a = 10^{\varepsilon/[10(1-\alpha)]} \quad ; \quad b = 10^{\varepsilon/(10\alpha)}$$

où ε est la tolérance d'erreur en dB.

- Rapport entre pôles et zéros :

$$\frac{\omega_{z_k}}{\omega_{p_k}} = a$$

Le rapport a assure une pente moyenne de -20α dB/décade.

- Récursion des pôles :

$$\begin{cases} \omega_{p_k} = \omega_{p_0} (ab)^k \\ \omega_{z_k} = a \cdot \omega_{p_0} (ab)^k \end{cases}$$

4. Calcul du nombre de pôles/zéros (N)

Le nombre de termes N dépend de :

- La plage de fréquences cible ($\omega_{\min}$ à $\omega_{\max}$)
- La tolérance d'erreur (ex. ± 2 dB)

$$N = \left\lceil \frac{\log(\omega_{\max}/\omega_{p0})}{\log(ab)} \right\rceil + 1$$

5. Ajustement du gain K

Le gain K est choisi pour aligner la magnitude avec la fonction idéale à une fréquence de référence (ex. ω_0) :

$$K = \omega_0^\alpha \prod_{k=1}^N \frac{1 + \frac{\omega_0}{\omega_{p_k}}}{1 + \frac{\omega_0}{\omega_{z_k}}}$$

I.2.5 Méthode d'Oustaloup

Cette méthode approxime s^α sur une bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h]$ avec $2N + 1$ pôles/zéros répartis symétriquement [8] :

$$H_{\text{Oustaloup}}(s) = \omega_h^\alpha \prod_{k=-N}^N \frac{1 + s/\omega_{z_k}}{1 + s/\omega_{p_k}},$$

avec :

$$\omega_{z_k} = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+1-\alpha/2}{2N+1}}, \quad \omega_{p_k} = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+1+\alpha/2}{2N+1}}.$$

Un choix typique est $N = 5$ pour une erreur inférieure à 2 dB [13].

soit le derivateur généralisé suivant :

$$D_{\text{gen}}(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

ω_c est La fréquence de coupure, α est l'ordre fractionnaire. La figure ci dessous représente le diagramme de bode du derivateur généralisé dans une plage de fréquence $[\omega_l, \omega_h]$

On obtient le transfert fractionnaire borné en fréquences donné par :

$$D_{\text{borne}}(s) = \left[C_0 \frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \right]^\alpha \tag{I.8}$$

avec

$$C_0 = \frac{\omega_l}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h} \tag{I.9}$$

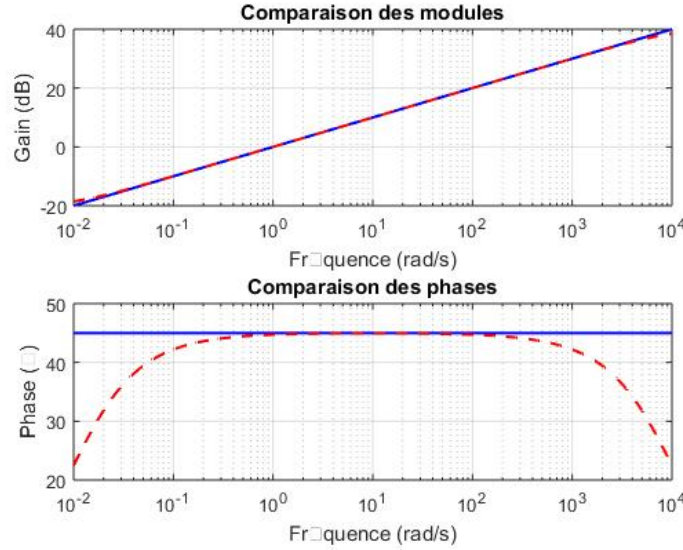


FIGURE I.2 – Tracé de Bode du dérivateur généralisé et son approximé

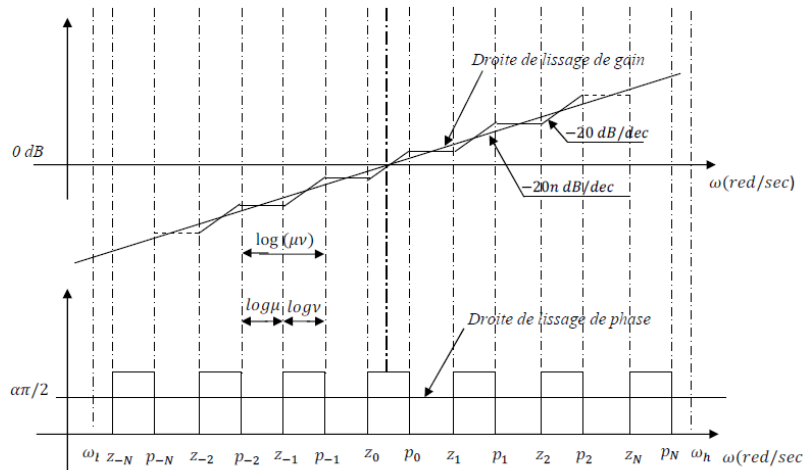
La figure (I.2) représente à titre d'exemple, les diagrammes de Bode du dérivateur généralisé $D_{\text{gen}}(s) = \left(\frac{s}{1}\right)^{0.5}$ (en trait pointillé) et ceux du dérivateur généralisé borné en fréquences correspondant $D_{\text{borne}}(s) = \left[0.0316 \frac{1+s/0.001}{1+s/1000}\right]^{0.5}$ en trait continu. Ce dérivateur généralisé résultant doit être approximé par une fonction de transfert d'ordre entier, constituée de zéros et de pôles de la forme :

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h}\right)^\alpha \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_k}}{1 + \frac{s}{p_k}} \quad (\text{I.10})$$

avec

$$D(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \quad (\text{I.11})$$

La figure (I.3) suivante représente le diagramme asymptotique de Bode de $D_N(s)$, ce dernier est lissé pour aboutir au diagramme de $D_{\text{bf}}(s)$.


 FIGURE I.3 – Diagramme asymptotique de Bode de $D_{\text{gen}}(s)$ et $D_N(s)$.

N est le nombre de cellules utilisées dans l'approximation, les pôles et les zéros sont distribués récursivement, comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\omega_{p_k}}{\omega_{z_k}} = \mu > 0 \\ \frac{\omega_{z_{k+1}}}{\omega_{p_k}} = \nu \\ \frac{\omega_{z_{k+1}}}{\omega_{z_k}} = \frac{\omega_{p_{k+1}}}{\omega_{p_k}} = \mu\nu > 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

les rapports μ et ν sont appelés "facteurs récursifs" $\mu\nu$ est un rapport constant entre deux zéros ou deux pôles consécutifs. L'approximation se fait par un lissage des diagrammes asymptotiques de Bode de $D_{borne}(s)$ (voir figure (I.3)).

Généralement ce rapport est fixé initialement à 5 et le calcul du nombre total des fréquences transitionnelles à l'aide de l'équation I.12 :

$$2N + 1 = \text{arrondi} \left[\frac{\log(\omega_h/\omega_b)}{\log((\mu\nu_c)_{\text{initial}})} + 0.5 \right] \quad (I.12)$$

À partir des pentes des segments AB et $A'B'$, données par :

$$20m \text{ dB/dec} = \frac{\Delta \text{dB}}{\log(\nu) + \log(\mu_c)} \quad (I.13)$$

$$20 \text{ dB/dec} = \frac{\Delta \text{dB}}{\log(\nu)} \quad (I.14)$$

On déduit le rapport des pentes :

$$m = \frac{\log(\nu)}{\log(\mu_c\nu)} \quad (I.15)$$

À partir du diagramme de Bode, on obtient :

$$\frac{\omega_h}{\omega_l} = (\mu_c\nu)^{2N+1} \Rightarrow (\mu_c\nu) = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{1/(2N+1)} \quad (I.16)$$

Enfin, la décomposition des facteurs récursifs :

$$\mu = (\mu_c\nu)^m \quad \text{et} \quad \nu = (\mu_c\nu)^{1-m} \quad (I.17)$$

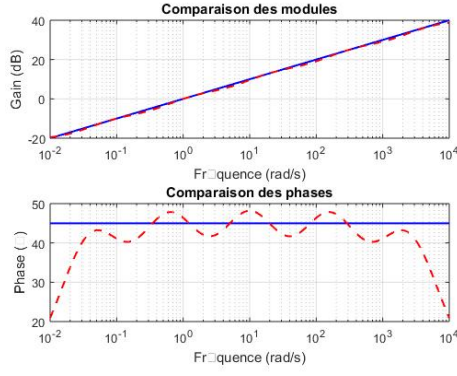
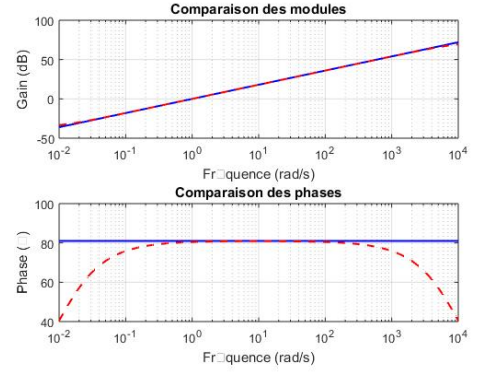
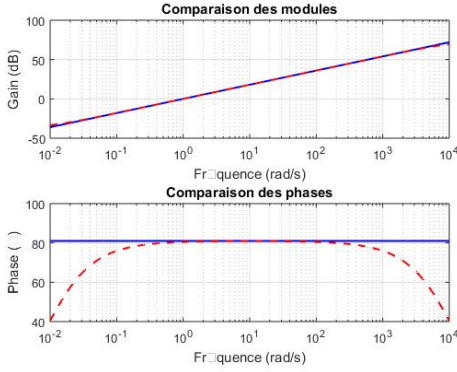
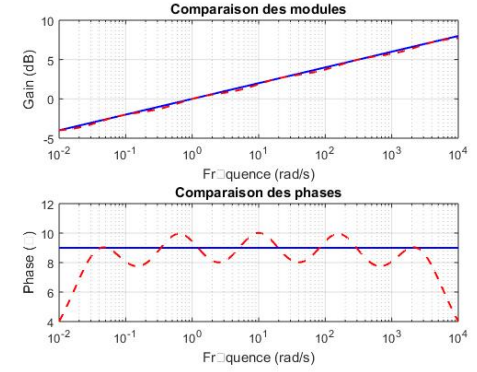

 (a) diagramme de bode pour $N=5, \alpha=0.5$

 (b) diagramme de bode pour $N=20, \alpha=0.9$

 (c) diagramme de bode pour $N=10, \alpha=0.9$

 (d) diagramme de bode pour $N=5, \alpha=0.1$

 FIGURE I.4 – Diagrammes de bode du derivateur et de son approximé pour différentes valeurs de α et N

I.2.6 Interprétation

Quand on regarde la figure I.4 ci-dessus, on peut en tirer certaines conclusions sur la méthode d'oustaloup et ses paramètres comme l'ordre α , le nombre de cellules N et la plage de fréquences choisies. Au début quand on simule avec un nombre de cellule $N=5$ on peut voir que l'approximation est imprécise voir incorrect puisqu'on voit des oscillations, la méthode devient meilleure pour $N=10$ et s'améliore de mieux en mieux avec $N=20$. La méthode d'oustaloup dépend également de l'ordre fractionnaire α , on peut remarquer que si on s'approche de zéro ou de 1, la méthode diminue en efficacité, la plage de fréquence est aussi importante pour cette méthode, la réduire réduira également la précision de la méthode

I.2.7 Procédure d'implémentation de s^α

Pour implémenter s^α via les méthodes de Charef ou d'Oustaloup [2, 8], on suivra les étapes suivantes :

1. Choisir N , ω_l , et ω_h

- N détermine le nombre de cellule (typiquement $N > 5$) [8].
- ω_l (fréquence basse) et ω_h (fréquence haute) définissent la bande d'approximation.

2. Générer les pôles et zéros

$$\omega_{z_k} = \omega_l \cdot \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+1-\alpha/2}{2N+1}}, \quad \omega_{p_k} = \omega_l \cdot \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+1+\alpha/2}{2N+1}}.$$

Ces exposants assurent une répartition logarithmique pour approximer la pente α [13].

3. Construction de la fonction de transfert

$$H(s) = \omega_h^\alpha \prod_{k=-N}^N \frac{1 + s/\omega_{z_k}}{1 + s/\omega_{p_k}}$$

4. Ajuster le gain K

$$K = \omega_h^\alpha \quad [2]$$

où ω_h^α normalise le gain à la fréquence haute.

Le tableau I.1 nous montre la différence qu'il y'a entre les deux méthodes

Méthode	Principe	Précision	Bande de fréquence	Complexité	Utilisation typique
Charef	Cascade de pôles et zéros espacés géométriquement	Moyenne à bonne (erreur ± 2 dB)	Limitée (faible bande)	Faible (simple à implémenter)	Approximations rapides ou systèmes simples
Oustaloup	Distribution symétrique de pôles/zéros ($2N + 1$)	Très bonne (erreur < 2 dB)	Large bande ($\omega_l \rightarrow \omega_h$)	Plus élevée (N grand possible)	Simulation et commande robuste, utilisation logicielle

TABLE I.1 – Comparaison entre les méthodes d'approximation de Charef et d'Oustaloup.

Les approximations (Charef/Oustaloup) utilisent des outils sur Matlab (CRONE Toolbox). Ces outils simplifient l'approximation et la génération des des pôles/zéros

I.3 Exemple

Voici un exemple d'approximation de la dérivée fractionnaire $s^{0.5}$ (racine carrée de s) avec la méthode d'Oustaloup :

1. Paramètres initiaux

- Ordre de l'approximation : $N = 3$ (7 pôles/zéros)

- Plage de fréquences : $\omega_l = 0.1 \text{ rad/s}$, $\omega_h = 10 \text{ rad/s}$
- Exposant fractionnaire : $\alpha = 0.5$

2. **Formules des zéros/pôles** Pour $k = -N, \dots, N$:

$$\omega_{z_k} = \omega_l \cdot \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+1-\alpha/2}{2N+1}}$$

$$\omega_{p_k} = \omega_l \cdot \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+1+\alpha/2}{2N+1}}$$

3. **Calcul pour $k = -3$ (exemple)**

$$\begin{aligned} \omega_{z_{-3}} &= 0.1 \cdot 100^{\frac{-3+3+1-0.25}{7}} \\ &= 0.1 \cdot 100^{0.75/7} \approx 0.1637 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{p_{-3}} &= 0.1 \cdot 100^{\frac{-3+3+1+0.25}{7}} \\ &= 0.1 \cdot 100^{1.25/7} \approx 0.1513 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

4. **Liste complète (N=3, $\alpha = 0.5$)**

- Zéros : [0.1637, 0.3162, 0.612, 1.175, 2.28, 4.37, 8.51]
- Pôles : [0.1513, 0.438, 0.851, 1.643, 3.162, 6.11, 11.75]

5. **Calcul du gain K**

$$K = \omega_h^\alpha = 10^{0.5} = \sqrt{10} \approx 3.162$$

6. **Fonction de transfert finale**

$$H_{\text{Oustaloup}}(s) = 3.162 \cdot \prod_{k=-3}^3 \frac{1 + s/\omega_{z_k}}{1 + s/\omega_{p_k}} \quad (\text{I.18})$$

$$G(s) \approx 3.162 \cdot \frac{(s + 0.848)(s + 1.639)(s + 3.162)(s + 6.123)(s + 11.75)(s + 22.84)(s + 43.7)}{(s + 1.18)(s + 2.277)(s + 4.382)(s + 8.511)(s + 16.43)(s + 31.62)(s + 61.36)}$$

Remarque

Ces approches permettent une implémentation pratique des dérivées. L'utilisation des méthodes de (Charef/Oustaloup) varie selon le besoin du compromis précision/complexité, dans ce travail nous utiliserons la méthode d'oustaloup

I.4 Fonction idéale de Bode

L'iso-amortissement est une propriété très souhaitable dans un système asservi qui avec cette propriété devient très robuste aux changements de gain. Pour un asservissement à retour unitaire, la caractéristique phase plate fait référence à la situation dans laquelle la phase de sa fonction de transfert en boucle ouverte est plate sur le plan de Bode. La première preuve de l'existence du concept de contrôle d'ordre fractionnaire a été donnée par Bode en 1945[11]. Bode a proposé une conception robuste aux changements ou aux incertitudes des paramètres du système. Il a proposé un intégrateur d'ordre fractionnaire comme fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi à retour unitaire, qui garantit des caractéristiques d'iso-amortissement. Une phase constante sur une large plage de fréquences évite les variations brutales de marge de phase, stabilisant le système malgré les incertitudes de gain. Cette fonction est appelée fonction idéale de Bode et sa formule est la suivante :

$$L(S) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \quad (\text{I.19})$$

Où ω_c est la fréquence de coupure et α la pente de la caractéristique, avec $1 < \alpha < 2$.

Son diagramme de Bode présente les caractéristiques suivantes :

— **Gain :**

$$|L(j\omega)| = -20\alpha \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \text{ [dB]}, \quad \text{où } \omega_c \text{ est la fréquence de coupure}$$

soit une droite de pente 20α dB/décade.

— **Phase :**

$$\angle L(j\omega) = -\alpha \cdot (\pi/2),$$

La phase est constante quelle que soit ω [11].

La fonction idéale de Bode peut être réécrite, comme suit :

$$L(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \left(\frac{\omega_c}{s} \right)^{\lambda+1} = \frac{1}{\tau_c s^{\lambda+1}} \quad (\text{I.20})$$

$$\lambda = \alpha - 1; \tau_c = \frac{1}{\omega_c^{\lambda+1}}$$

La figure I.5 montre la réponse fréquentielle de la fonction idéal de Bode

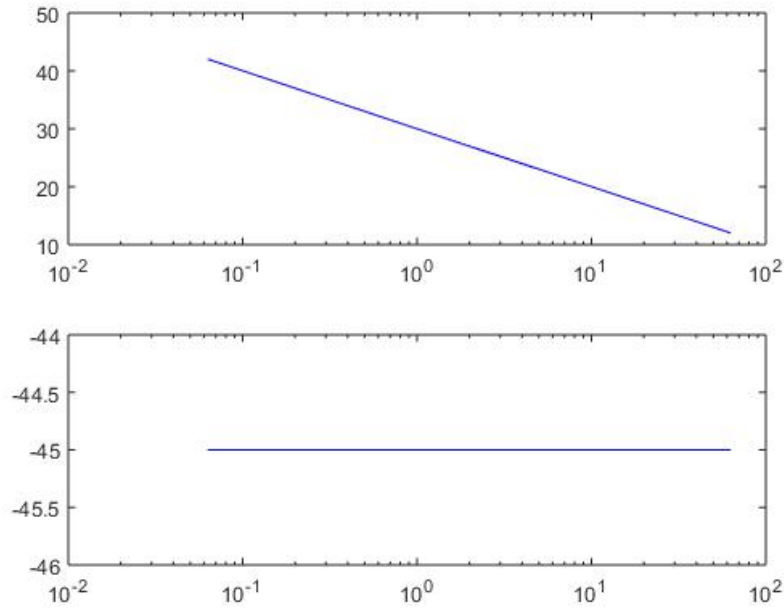


FIGURE I.5 – Réponse fréquentiel de la fonction idéale de Bode.

I.4.1 Fonction de transfert idéale de Bode en boucle Fermée

En boucle fermée, le système se comporte de manière similaire à un système du second ordre avec un amortissement. La fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est la suivante :

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{1}{\tau_c s^{\lambda+1}}}{1 + \frac{1}{\tau_c s^{\lambda+1}}} = \frac{1}{\tau_c s^{\lambda+1} + 1} \quad (\text{I.21})$$

ou : $0 < \lambda < 1$

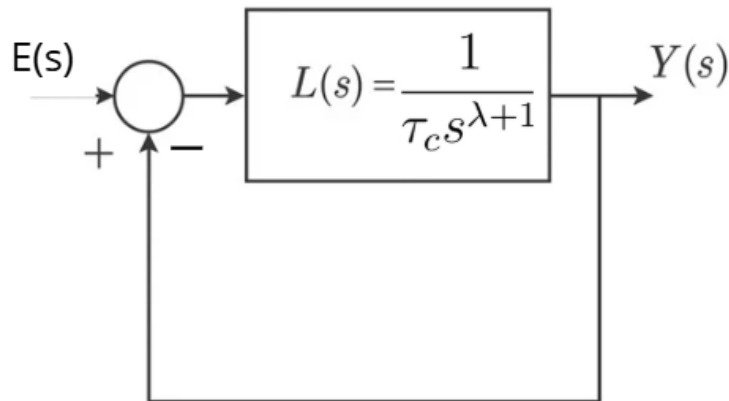


FIGURE I.6 – Représentation de la fonction idéale de Bode en BF.

I.4.2 Étude de La Fonction de transfert idéale de Bode en boucle fermée

Dans ce qui suit on va étudier le comportement de la fonction idéale de bode en jouant sur ses deux paramètres λ et τ_c .

I.4.2.1 Variation de λ et τ_c constant

On fixe la valeur de τ_c à 1 et on fait varier λ , on prend 3 valeurs : 0.3, 0.5 et 0.6. Après simulation on obtient la figure suivante :

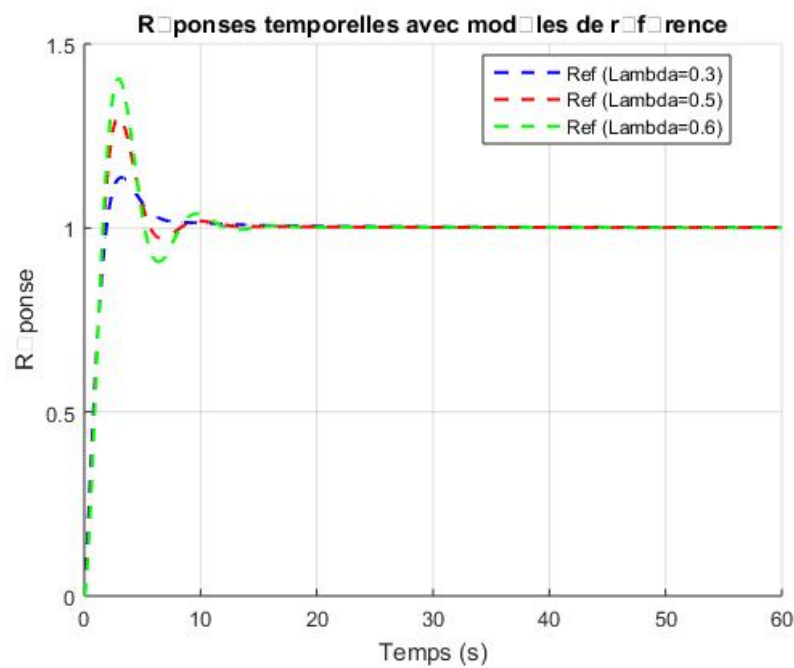


FIGURE I.7 – Réponse indicielle pour différentes valeurs de λ .

I.4.2.2 Variation de τ_c et λ constant

Dans ce cas on fait varier $\tau_c=(1,10,30)$ et on fixe la valeur de $\lambda=0.5$.

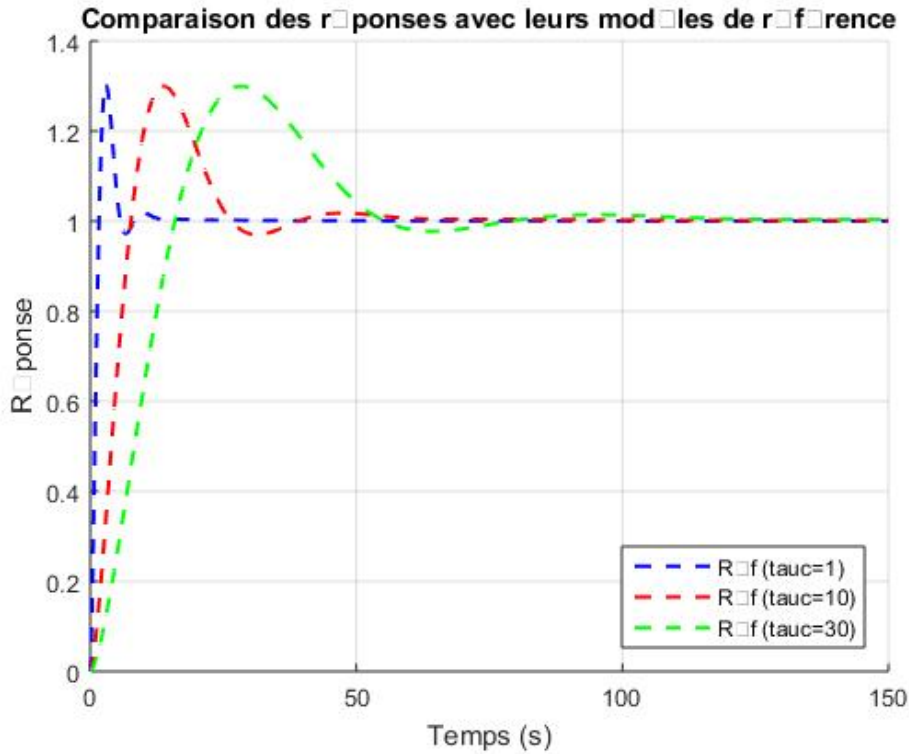


FIGURE I.8 – Réponse indicielle de la fonction idéale de bode pour différentes valeurs de τ_c .

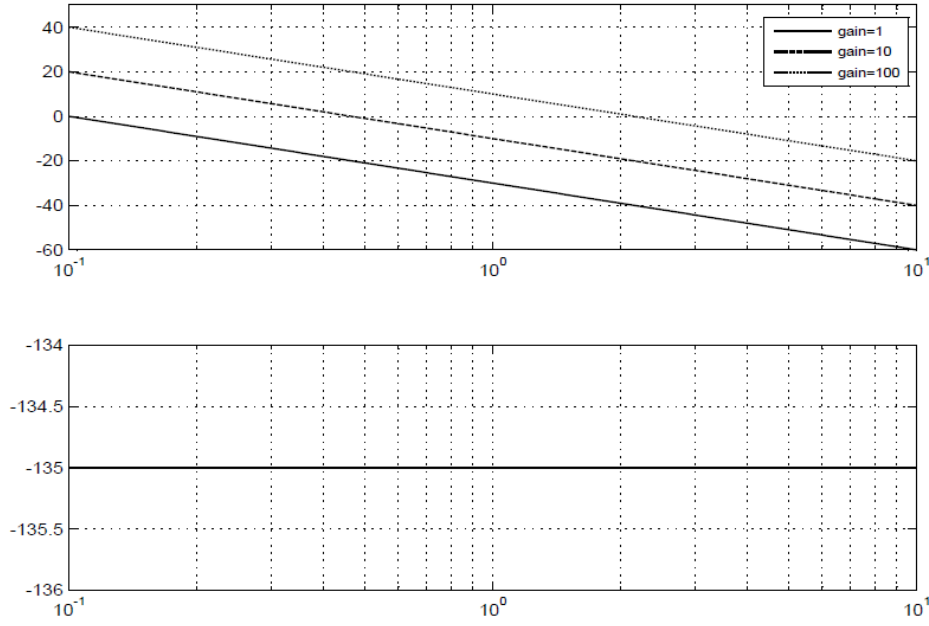
I.4.2.3 Interprétation des résultats

Sur la figure I.7, on peut remarquer que le dépassement augmente en augmentant la valeur de λ , le temps de monté quand à lui n'est pas affecté.

La Figure I.8 montre que, la réponse indicielle de la fonction idéale de Bode en boucle fermée est similaire à celle d'un système de second d'ordre amortie. On remarque que la rapidité du système dépend uniquement de la valeur de τ_c , la réponse est plus rapide en diminuant la valeur de τ_c et vis versa. Le dépassement quand à lui reste constant, il est indépendant de la valeur de τ_c . Cette propriété est dite propriété d'iso-amortissement

I.4.3 Robustesse de la fonction idéale de Bode

La marge de phase ne varie pas sur une vaste plage de fréquences ($\approx -\alpha \cdot \pi/2$), ce qui permet d'avoir une stabilité robuste. Cette propriété d'iso-amortissement permet aux système de maintenir les performances malgré les variations incertaines. Comme il est illustré sur la figure (I.9).

FIGURE I.9 – Tracé de Bode de $F(s)$ avec des gains différents.

I.4.4 Performances du modèle fractionnaire $L(s)$:

La réponse de la fonction idéale de Bode en boucle fermée s'apparente à celle d'un système entier de second ordre amorti. Cette similarité permet d'établir une correspondance entre ces systèmes classiques et des modèles d'ordre non entier [10, 15]. Par conséquent, les deux paramètres λ et τ_c de la fonction idéale de Bode peuvent être calculés si on a les caractéristiques fréquentielles et temporelles d'un système de second ordre entier. Les formules nécessaires sont données comme suit

Spécifications fréquentielles :

- Facteur de qualité :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \frac{\phi_{\max}}{2})}}$$

où $\phi_{\max}$ est la phase maximale du système. [13]

- Fréquence de coupure :

$$\omega_c = \frac{1}{\tau_c^{\lambda+1}}$$

Hypothèse : τ_c est la constante de temps et λ un paramètre d'ordre fractionnaire.*[10]

-Marge de phase :

$$\phi_\alpha = \pi - (\lambda + 1)\frac{\pi}{2}$$

Valide pour un système d'ordre fractionnaire $1 + \lambda$. [11]

- Facteur d'amortissement :

$$\xi = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\phi_{\max}}{2}}{2^{\gamma-1}}}$$

γ est un paramètre lié à la réponse fréquentielle (à définir dans le contexte).[13]

- Pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_n \left(-\cos \left(\frac{\gamma\pi}{2} \right) \right)^{1/\gamma}$$

Hypothèse : Modèle d'ordre non entier avec γ comme exposant. [8]

- Facteur de resonance :

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sin \left(\frac{\gamma\pi}{2} \right)}$$

Applicable pour des systèmes à phase constante (γ définit comme précédemment).[11]

Spécifications temporelles[11] - Dépassement (%) :

$$M_p = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = 0.8\lambda(\lambda + 0.25)$$

Valide pour $0 < \lambda < 1$ [13, 14].

- Temps de réponse à 2% :

$$T_s (2\%) \approx \frac{4}{\cos \left(\pi - \frac{\pi}{\lambda+1} \right)^{\frac{-1}{c}}}$$

Intervalle recommandé : $0.39 < \lambda < 1$ [13, 14].

- Temps de réponse à 5% :

$$T_s (5\%) \approx \frac{3}{\cos \left(\pi - \frac{\pi}{\lambda+1} \right)^{\frac{-1}{c}}}$$

Intervalle recommandé : $0.44 < \lambda < 1$ [13, 14].

Remarque : La fonction idéale de Bode est un modèle de référence robuste. En effet, la marge de phase reste constante, elle ne varie pas avec la variation du gain la fonction de Bode en boucle fermée est considérée comme un modèle de référence pour la plupart des stratégies de commandes fractionnaires. Avec ses deux paramètres τ_c et λ on peut ajuster le dépassement et la rapidité l'un indépendamment de l'autre.

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les systèmes fractionnaires avec le dérivateur généralisé et l'approximation des systèmes d'ordre fractionnaires avec les méthodes d'approximation de Charef et d'oustaloup ici pour notre système on utilisera la méthode d'oustaloup grâce à ses propriétés sur la précision et l'intégration logicielle.

on a également fait l'étude des systèmes avec la fonction idéale de bode comme modèle de référence et regarder son comportement en modifiant τ_c et λ_B cette dernière en boucle fermée a le même comportement qu'un système de second ordre amorti mais avec des caractéristiques qui varient uniquement en fonction de l'ordre du dérivateur généralisé qui définit la chaîne directe.

Ce chapitre nous a permis de présenter les bases des systèmes fractionnaires, leurs opérateurs et les méthodes d'approximation, ainsi que l'apport de la fonction idéale de Bode comme modèle de référence. Nous utiliserons ces notions dans le chapitre suivant pour la reglage et l'optimisation des contrôleurs (PID et FOPID) appliqués au système étudié.

Chapitre II

Contrôleur PID Classique et PID Fractionnaire

II.1 Introduction

La régulation est l'âme technique de l'automatisme qui a pour but de faire fonctionner des machines sans intervention humaine, ces systèmes s'appuient sur des stratégies de contrôle robustes qui permettent d'assurer stabilité, précision et rapidité .

Le contrôleur PID (Proportionnel-Intégral-Dérivé) s'est imposé comme le cœur de l'automatisme industrielle depuis près d'un siècle grâce à sa structure simple accompagnée d'une efficacité démontrée dans la régulation des processus linéaires. Cependant le régulateur PID présente des limitations, face aux systèmes complexes, pour cette raison d'autres techniques de régulation ont été développées, offrant des solutions plus avancées. Le PID fractionnaire (FOPID) a été introduit pour résoudre les problèmes que le PID classique ne peut pas traiter. Ce dernier se présente comme une extension puissante du PID classique en intégrant des ordres fractionnaire (β et μ) aux actions intégrale et dérivée.

Dans ce chapitre, nous présentons les contrôleurs PID et PID d'ordre fractionnaire, les différentes structures de ces contrôleurs ainsi que les méthodes de réglage de leurs paramètres. On termine ce chapitre par exemple d'illustration.

II.2 PID classique

En automatique, le régulateur PID (Proportionnel, Intégral, Dérivé) est un système de contrôle permettant d'améliorer les performances d'un asservissement en corrigeant les écarts (l'écart entre la consigne et sortie de l'asservissement) et en améliorant la stabilité et la rapidité du système. Le PID possède trois actions

- **Action proportionnelle (P)** : Elle agit sur l'erreur actuelle, autrement dit la différence entre la consigne et la valeur mesurée. Plus l'erreur est grande, plus la correction appliquée est importante.

L'expression de la commande dans ce cas est : $u_p(t) = K_p e(t)$

Elle a pour avantage de réagir immédiatement à l'écart entre la sortie et la consigne mais elle ne le supprime pas complètement en régime permanent.

- **Action intégrale (I)** : Elle permet de supprimer les erreurs persistantes. En effet, elle permet d'éliminer l'erreur statique, mais elle provoque des oscillations. l'expression de la commande dans ce cas est : $u_i(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$

- **Action dérivée (D)** : Anticipe les changements pour améliorer la stabilité et limiter les dépassements mais elle est sensible au bruits de mesure. L'expression de la commande dans ce cas est : $u_d(t) = K_d \frac{d}{dt} e(t)$

La somme des trois actions donne la commande suivante :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (\text{II.1})$$

En appliquant la transformée de Laplace, la fonction de transfert du régulateur devient :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (\text{II.2})$$

- K_p : gain proportionnel.
- K_i : gain intégral .
- K_d : gain dérivé.

II.2.1 Différentes structures du PID

Le PID classique possède trois structures possibles qui reposent sur la façon dont les actions (P, I et D) sont organisées.

II.2.1.1 Structure parallèle

Une structure parallèle est une structure où chaque terme agit directement sur l'erreur. Elle est très utilisée en théorie et en implémentation numérique, d'autant plus qu'elle est facile à régler. Avec cette structure, on contrôle chaque paramètre indépendamment des autres.

Cette structure est limitée car le bloc dérivé ($K_d \frac{de(t)}{dt}$) peut générer un pic si l'échelon varie brutalement. En effet en appliquant la dérivée sur l'erreur il amplifie fortement le bruit. Afin de remédier à ce problème, on ajoute un filtre passe bas à l'action dérivée

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{où } K_p = K_c, \quad K_i = \frac{K_c}{T_i}, \quad K_d = K_c T_d.$$

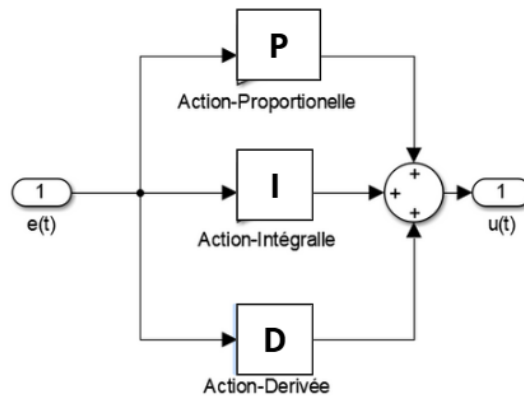


FIGURE II.1 – Structure parallèle d'un PID

II.2.1.2 Structure série

Dans cette structure le régulateur est disposé comme une chaîne de blocs successifs. Cette structure possède naturellement un filtre passe bas grâce au terme $(1 + T_d s)$. L'inconvénient de cette structure est l'interaction des paramètres, le réglage de l'un affecte l'autre. Sa

formule mathématique est donnée par :

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \quad (\text{II.4})$$

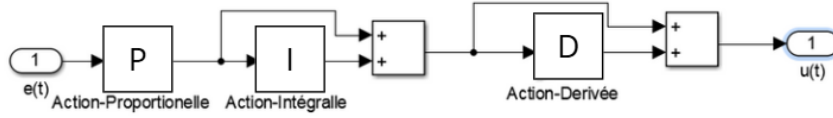


FIGURE II.2 – Structure série d'un PID

II.2.1.3 Structure mixte

La structure mixte fait la combinaison entre les actions proportionnelle, dérivée et intégral de tel façon à optimiser le système, l'action proportionnelle agit directement sur l'erreur, tandis que les actions dérivée et intégral interviennent sur des signaux filtrés ou partiellement corrigés afin de réduire les effets indésirables.

Cette structure a pour avantages, la réduction du bruit. En effet quand on applique la dérivée sur un signal filtré on réduit l'amplification du bruit à haute fréquence. La structure mixte peut également rendre le système plus stable envers les variations des paramètres tout comme elle permet d'ajuster les paramètres du P I et D séparément, ce qui donne une meilleure flexibilité

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt - T_d \frac{d}{dt} y(t) \right] \quad (\text{II.5})$$

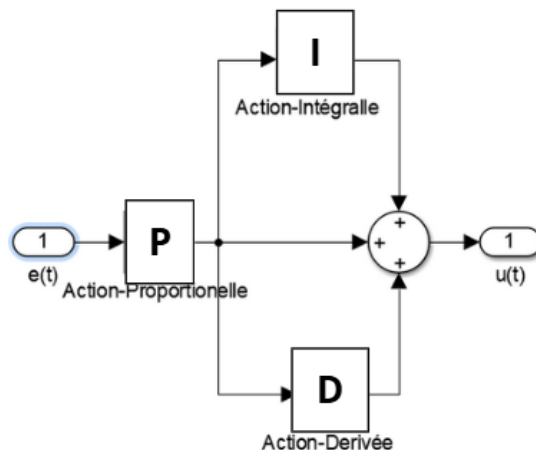


FIGURE II.3 – Structure mixte d'un PID

II.3 PID d'ordre fractionnaire

II.3.1 Définition

Le FOPID (Fractional Order PID controller), est une extension du régulateur PID classique dans laquelle les actions intégrale et dérivée sont d'ordre fractionnaire. Cette généralisation offre deux degrés de liberté supplémentaires (β et μ) permettant un réglage plus fin des systèmes complexes.

Sa forme mathématique générale est :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\beta} + K_d s^\mu \quad (\text{II.6})$$

où :

- K_p est le gain proportionnel.
- K_i est le gain intégral.
- K_d est le gain dérivé.
- β est l'ordre de l'intégration fractionnaire. ($\beta > 0$)
- μ est l'ordre de la dérivation fractionnaire ($\mu > 0$)

Le FOPID choisit des ordres réels non entiers qui permettent d'avoir plus de liberté de réglage et une meilleur adaptation à la dynamique du système à contrôler

- ▷ Si $\beta = 0$ et $\mu = 0$, on obtient un correcteur ***P classique***.
- ▷ Si $\beta = 1$ et $\mu = 0$, on obtient un correcteur ***PI classique***.
- ▷ Si $\beta = 0$ et $\mu = 1$, on a un correcteur ***PD classique***.
- ▷ Si $\beta = 1$ et $\mu = 1$, on obtient un correcteur ***PID classique***.
- ▷ Si $0 < \beta < 1$ et $\mu = 1$, on obtient un correcteur ***PI fractionnaire***.
- ▷ Si $\beta = 0$ et $0 < \mu < 1$, on obtient un correcteur ***PD fractionnaire***.
- ▷ si $0 < \beta < 1$ et $0 < \mu < 1$, on obtient un correcteur ***PID fractionnaire***.

II.3.2 Différents types du PID fractionnaire

Il existe plusieurs types de PID fractionnaires chacun a ses propres avantages et domaines d'utilisation.

II.3.2.1 PID fractionnaire basique $PI^\beta D^\mu$

sa formule mathématique est la suivante :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\beta} + K_d s^\mu$$

Sa structure est donnée par la figure II.4

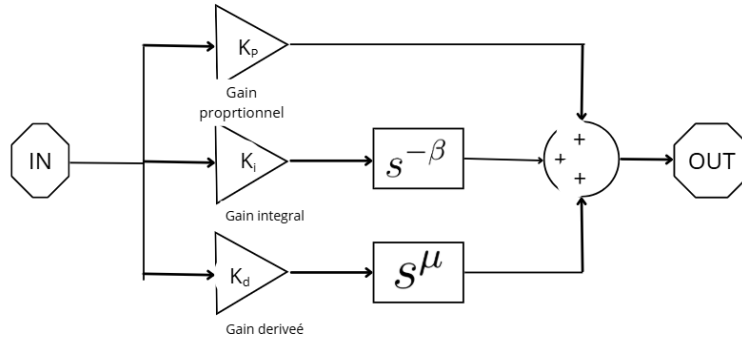


FIGURE II.4 – Structure d'un PID fractionnaire

II.3.2.2 PID fractionnaire avec filtre

C'est un FOPID auquel on applique un filtre passe bas sur la partie dérivée son expression est donnée par l'équation(II.7) :

$$C(s) = K_p + K_i s^{-\beta} + \frac{K_d s^\mu}{(1 + \tau s)} \quad (\text{II.7})$$

Sa structure est donnée par la figure II.5.Son avantage

- Réduction du bruit
- Précision améliorée en effet la dérivée est physiquement réalisable l'opérateur s^μ est approximable avec Oustaloup/crone

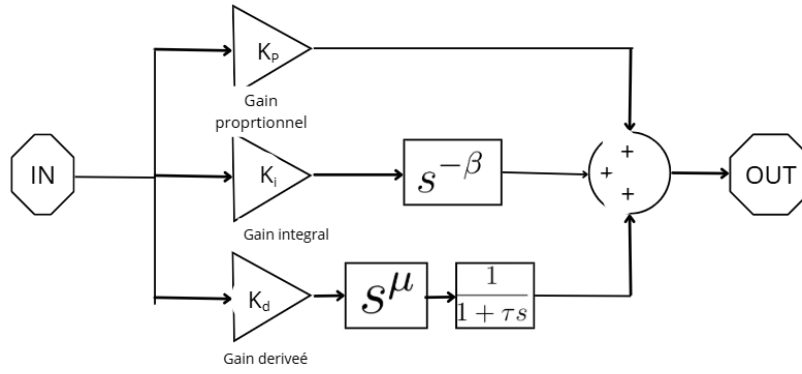


FIGURE II.5 – Structure d'un FOPID avec filtre

II.3.2.3 PID fractionnaire type FOF-PID[27]

C'est un PID classique en série avec un filtre fractionnaire issue de la combinaison entre deux méthodes robustes la commande IMC[28] et la commande CRONE .Sa formule mathématique :

$$C(s) = F(s) \left[K_c \left(\frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s + 1 \right) \right] \quad (\text{II.8})$$

Remarque :

La fonction de transfert du filtre est calculée selon le modèle idéale de BODE en boucle fermée

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau_f s^\gamma}$$

- τ_f : Constante de temps ajustant la dynamique du filtre.
- γ : Ordre non entier ($0 < \gamma < 1$), cœur de la robustesse.

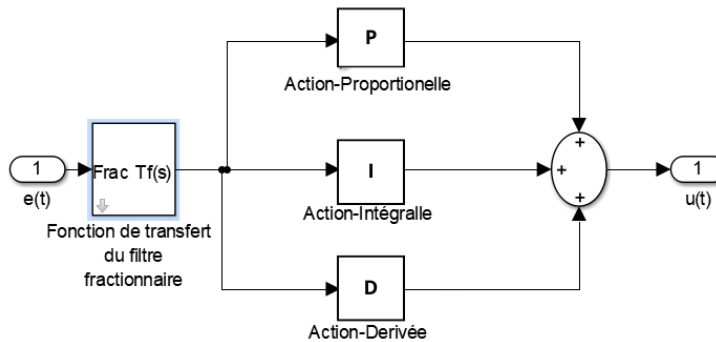


FIGURE II.6 – Structure d'un FOFPID

II.4 Méthodes de réglages du PID et FOPID

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les paramètres du PID classique. La plupart de ces méthodes ont été adaptées ou généralisées pour le réglage des paramètres du contrôleurs PID d'ordre fractionnaire. Parmi ces méthodes on peut citer : Méthode de Zeigler-Nichols [26], Méthode basée sur le dépassement de la réponse indicielle[27], méthode analytique basée sur le modèle interne[28] et les méthodes d'optimisations...ect. Dans notre travail, nous avons utilisé des techniques d'optimisation pour le réglage des paramètres du contrôleur.

II.5 Méthodes d'optimisation

Les méthodes d'optimisation pour le réglage des paramètres du contrôleur PID/FOPID sont des techniques mathématiques ou algorithmiques utilisées pour déterminer les paramètres optimaux du contrôleur de manière à améliorer les performances du système contrôlé, selon un critère de performance (critère d'erreur) prédéfini. Il existe plusieurs critères d'erreur on peut en citer :

- **IAE(integral of absolute error) [17]** : Elle permet de calculer l'écart cumulé entre la consigne et la sortie d'un système sa formule mathématique est donnée par l'équation (II.9) :

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt \quad (\text{II.9})$$

$$e(t) = y_{\text{consigne}}(t) - y(t)$$

où $e(t)$ est l'erreur à l'instant t , et T la durée d'observation.

- **ITAE(intégral of time weighted absolute error) [17]** :Sa formule mathématique est la suivante :

$$\text{ITAE} = \int_0^\infty t|e(t)|dt \quad (\text{II.10})$$

où $e(t) = r(t) - y(t)$ est l'erreur entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$ du système .

Ce calcul se fait généralement sur un intervalle fini $\langle T \rangle$ en pratique elle est souvent évalué $\text{ITAE} = \int_0^T t|e(t)|dt$.

Ce qui fait que le critère ITAE pèse linéairement l'erreur durant la simulation, pénalisant plus fortement les écarts tardifs que précoces.

Notre travail consiste à trouver les paramètres optimaux du contrôleur PID et PID fractionnaire

en se basant sur la minimisation du critère d'erreur (IAE) dans lequel apparaît explicitement la différence entre la sortie de la boucle fermée (avec le contrôleur) et la réponse désirée donnée par un modèle de référence. Le modèle de référence est la fonction idéale de Bode en boucle fermée, choisie pour ces caractéristiques intéressantes. Dans ce travail, nous avons utilisé des algorithmes préprogrammés dans Matlab à savoir l'algorithme de simplexe de Nelder-Mead et l'algorithme SQP (programmation quadratique séquentielle) dont les fonction Matlab sont respectivement : "fminsearch" et "fmincon".

II.5.1 SQP(programmation quadratique séquentielle)[20] :

SQP Il résout séquentielle-ment des sous-problèmes quadratiques approximant le problème original [32] [33].ce qui donne à chaque itération la formation du lagrangien :

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \underbrace{\sum_i \lambda_i c_i(x)}_{\text{contraintes d'inégalité}} + \underbrace{\sum_j \nu_j ceq_j(x)}_{\text{contraintes d'égalité}}$$

. Formule du sous-problèmes

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T H_k d$$

Sous les contraintes :

$$c(x_k) + \nabla c(x_k)^T d \leq 0$$

$$ceq(x_k) + \nabla ceq(x_k)^T d = 0$$

$$lb - x_k \leq d \leq ub - x_k$$

- H_k : approximation de la Hessienne du Lagrangien
- $\nabla f(x_k)$: gradient de la fonction objectif
- $\nabla c(x_k), \nabla ceq(x_k)$: Jacobiens des contraintes
- Les bornes sur x sont transformées en bornes sur d

Plusieurs aménagements ont été ajouté a SQP ce dernier est faisable par rapport aux bornes $lb \leq x \leq ub$ qui sont conservé pour chaque itérations, dans le cas ou il y'a des valeurs indéfinies (NaN, Inf ou complexe) pendant l'exécution de la fonction objective l'algorithme SQP essaie de prendre un plus petit pas pour avoir la faisabilité

II.5.2 Algorithme simplexe de Nelder-Mead[22]

C'est un algorithme intégré dans matlab(**fminsearch**). C'est une méthode d'optimisation numérique sans dérivée sa façon de procéder consiste à créer un simplexe : un polygone à $n + 1$ sommets dans un espace à n dimensions, puis à chaque itérations, il le modifier via quatre opérations (réflexion, expansion, contraction, réduction) jusqu'à convergence vers un minimum local de la fonction.

étapes de l'algorithme de nelder-mead[30]

1. Réflexion

- *Objectif* : Explorer la direction opposée au pire point
- *Condition* : Opération de base toujours appliquée en premier
- *Formule* :

$$x_r = x_0 + \delta(x_0 - x_h) \quad \text{avec} \quad \delta = 1$$

où x_h est le pire point, x_0 le centroïde des n meilleurs points

2. Expansion

- *Objectif* : Accélérer la descente si la réflexion est très réussie
- *Condition* : Si $f(x_r) < f(x_l)$
- *Sa formule* :

$$x_e = x_0 + \gamma(x_r - x_0) \quad \text{avec} \quad \gamma = 2$$

3. Contraction

- *Objectif* : Diminuer l'exploration quand la réflexion donne des mauvais résultats
- *Conditions* :
 - *Contraction externe* : si $f(x_s) \leq f(x_r) < f(x_h)$

$$x_c = x_0 + \rho(x_r - x_0)$$

- *Contraction interne* : si $f(x_r) \geq f(x_h)$

$$x_c = x_0 - \rho(x_0 - x_h)$$

- Paramètre : $\rho = 0.5$

4. Réduction

- *Objectif* : Redémarrer l'exploration quand la contraction échoue
- *Condition* : Si le point contracté x_c n'est pas meilleur que x_h
- *Formule* :

$$x_i^{\text{new}} = x_l + \sigma(x_i - x_l) \quad \forall i \neq l \quad \text{avec} \quad \sigma = 0.5$$

Appliqué à tous les points sauf le meilleur point x_l

II.6 Exemple d'illustration

Nous considérons un exemple de système de l'article de Barbosa[31] donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Le modèle de référence est la fonction idéale de Bode en boucle fermée, décrit par la fonction de transfert suivante :

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau_c s^\alpha}$$

où $\alpha = \lambda + 1$.

Nous utilisons deux contrôleurs : le PID classique et le PID fractionnaire , afin de comparer leurs performances. τ_c et λ sont des paramètres qu'on fixe selon le cahier des charge, c-à-d la dynamique du système désirée. Tel que : τ_c fixe la rapidité du système et λ fixe le dépassement. le tableau II.1 regroupe les valeurs des paramètres utilisés que ce soit pour le modèle de référence et l'approximation d'oustaloup.

τ_c	λ	w_l (rad/s)	w_h (rad/s)	N
1	0.25	0.001	1000	10

TABLE II.1 – Paramètres de référence et d'approximation du FOPID

Les résultats obtenus avec les deux contrôleurs sont montrés sur la figure II.7 et leurs performances sont regroupées dans le tableau II.2.

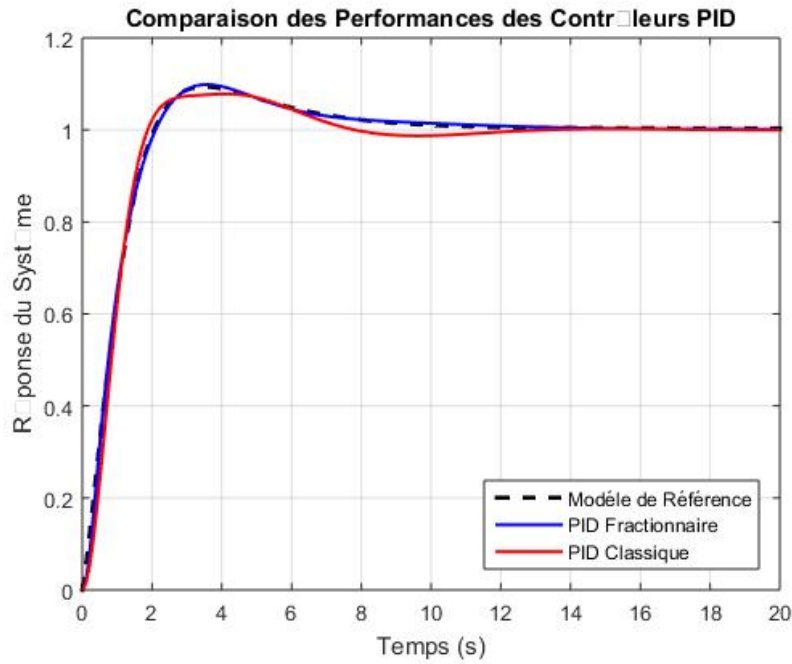


FIGURE II.7 – Comparaison entre le PID et le FOPID

Les paramètres des contrôleurs PID et FOPID obtenu en utilisant `fminsearch` et `fmincon` sont regroupés dans le tableau suivants :

Paramètre	PID Fractionnaire	PID Classique
K_c	4.0355	2.5891
T_i	1.2308	1.6625
T_d	2.5781	2.7760
β	1.1906	N/A
μ	1.3616	N/A

TABLE II.2 – Valeurs des paramètres PID et FOPID

Les deux contrôleurs ont donné de bons résultats. En effet, la sortie suit la référence avec les deux contrôleurs. On note également une petite supériorité du FOPID par rapport au PID classique. En effet, l'erreur entre le modèle de référence et la sortie du système commandé par le PID classique est supérieure à l'erreur entre le modèle de référence et la sortie du système commandé avec le FOPID.

Des le début on voit que les deux controleurs suivent la consigne en franchissant la valeur unitaire et reproduire fidèlement le dépassement maximal du modèle de référence .

Après avoir franchi le dépassement initial le réponses redescendent sans oscillations et suivent la consigne rapidement montrant un amortissement efficace. On note que le PID classique montre un creux avec des oscillations légères avant d'être fixé,ce qui veut dire que le PID d'ordre fractionnaire est légèrement supérieur au PID classique pour cette exemple de 3 ème ordre.

Au final le PID fractionnaire assure un suivi plus rapide et plus précis du modèle de référence par rapport au PID classique.

II.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les différentes structures des régulateur PID classique et PID fractionnaire, en nous intéressant aux trois actions fondamentales.

Nous avons vu comment ces actions se combinent dans différentes structures que ce soit parallèle, série ou mixte.

Nous avons présenté les méthodes de réglage des paramètres des contrôleurs que nous avons utilisé dans ce travail, à savoir méthodes d'optimisations basées sur la minimisation du critère d'erreur (IAE), la méthode SQP et la méthode du simplexe de Nelder-Mead . Les deux algorithmes d'optimisation non linéaire sont préprogrammé dans MATLAB, sous les commandes de `fminsearch` et `fmincon`. Enfin, nous avons terminé le chapitre avec un exemple de système d'ordre 3 pris de l'article de Barbosa [31].

Le travail effectué dans ce chapitre nous permettra de mieux comprendre et maîtriser la conception et l'ajustement des régulateurs PID et FOPID. Dans le chapitre suivant, nous mettrons en œuvre ces principes pour optimiser, selon le critère IAE des contrôleurs PID et FOPID appliqués pour la commande de la vitesse d'un véhicule électrique afin de comparer la performance de chaque régulateur et de valider la supériorité potentielle du FOPID dans la régulation de la vitesse d'un véhicule électrique.

Chapitre III

Contrôle de vitesse des véhicules électriques

III.1 Introduction

L'essor des véhicules électriques (VE) s'inscrit dans un contexte mondial de transition énergétique et de réduction des émissions polluantes. Sur le plan technologique, le contrôle de la vitesse constitue un enjeu central pour assurer à la fois le confort, la performance énergétique et la sécurité. Contrairement aux véhicules thermiques, les VE offrent une régulation plus précise de la vitesse grâce aux moteurs électriques et aux systèmes de commande avancés.

Parmi les approches classiques de régulation, le contrôleur PID reste largement utilisé en raison de sa simplicité, sa fiabilité et de sa mise en œuvre efficace dans de nombreuses applications industrielles. Toutefois, le contrôleur FOPID a récemment suscité un intérêt croissant grâce à ses performances dynamiques améliorées et à sa robustesse en intégrant deux nouveaux degrés de liberté (les ordres fractionnaires d'intégration et de dérivation).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au réglage des contrôleurs PID et FOPID pour la commande de la vitesse d'un véhicule électrique. L'objectif est d'analyser leur fonctionnement et d'évaluer leurs performances en termes de précision, stabilité et réponse dynamique, afin de déterminer lequel s'adapte le mieux aux exigences des protocoles modernes de propulsion électrique.

III.2 Définition d'un véhicule électrique

Un véhicule électrique est un moyen de transport qui peut être soit monomoteur ou multi-moteur généralement alimenté par une batterie rechargeable, son architecture est simple elle est composée d'un actionneur électrique, un dispositif de transmission et des roues comme le montre la figure III.1.

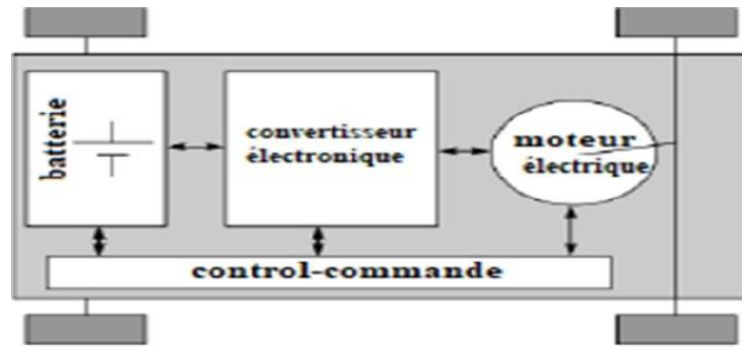


FIGURE III.1 – Composants d'un VE

III.3 Mode de fonctionnement d'un VE

Les véhicules électriques possèdent une batterie qui emmagasine l'énergie et se recharge grâce à l'électricité du réseau, ainsi que d'un ou de plusieurs moteurs électriques associés à un système de gestion et un dispositif de charge. La batterie est reliée au moteur électrique via un régulateur et un convertisseur. Le régulateur permet de moduler l'intensité du courant alimentant le moteur. Son fonctionnement est assez simple : lorsque le conducteur appuie sur l'accélérateur, la batterie fournit du courant(DC). Généralement le convertisseur le convertit alors en courant alternatif (AC) pour alimenter le moteur. Le convertisseur fait partie intégrante du moteur. Le point fort du véhicule électrique réside dans la chaîne de transmission électromécanique. En effet, un véhicule nécessite un couple élevé à basse vitesse pour accélérer, et un couple plus faible à une vitesse de croisière. Ces caractéristiques sont propres à un moteur électrique.

III.3.1 Types de véhicules électriques

Avec l'avancée technologique effectuée sur les les véhicules électriques on a vu naitre plusieurs types de véhicule.

III.3.1.1 Véhicule tout électrique

C'est un véhicule qui a uniquement une batterie rechargeable comme source d'alimentation qui alimente un moteur électrique. Il existe 2 types de véhicules :

- **VE à batteries rechargeables par prise de courant :** VE à batteries rechargeables par prise de courant généralement appelés BEV (Battery Electric Véhicules) sont purement électrique qui se fournissent en énergie avec une batterie qui est chargé via des prises externe
- **Véhicules électriques à alimentation par pile à combustible :** C'est des véhicules qui utilisent des piles à combustibles pour générer de l'électricité à partir de l'hydrogène, contrairement aux véhicules électriques à batterie (BEV), l'énergie n'est pas uniquement stockée, mais est produite en continu à mesure des besoins du véhicule.

III.3.2 Véhicules hybrides

Un véhicule hybride utilise deux source d'énergie il possède un moteur thermique et un moteur électrique. L'idée est d'avoir de meilleurs performances des deux sources pour un besoin de démarrage ou de rouler à une vitesse basse on utilisera le moteur électrique puisqu'il est vert mais si on veut mettre les vitesses on utilisera le thermique qui est plus puissant.

III.4 Spécifications fonctionnelles et techniques du système de commande de vitesse

Notre objectif est de contrôler la vitesse d'un véhicule électrique. Pour cela, il est nécessaire de concevoir un contrôleur capable de réguler la position du papillon des gaz (throttle position), qui gère l'accélération du véhicule et assure un mouvement fluide. La figure III.2 décrit un système hybride électrique dans lequel la commande de la vitesse est assurée par un servo moteur qui ajuste la position de l'accélérateur. Le système peut fonctionner en série (via la batterie) ou en parallèle (moteur + batterie ensemble). Le système est composé de plusieurs éléments interagissant entre eux comme suit :

— **Flux massique d'air (Air Mass Flow)**

→ L'air entre dans le moteur (à gauche du schéma).

— **Servomoteur d'accélérateur(Throttle Servo)**

→ C'est un moteur électrique qui ouvre ou ferme le papillon des gaz en fonction d'un signal de commande (Throttle Control Signal).

Il remplace la commande mécanique par câble dans les anciens véhicules.

— **Angle du papillon(Throttle-angle)**

→ C'est la position d'ouverture du papillon (throttle), donc la "throttle position". Plus il est ouvert, plus d'air entre → plus de puissance.

— **Pression dans le collecteur d'admission(Manifold Pressure)**

→ Elle varie selon la position du papillon et influence la quantité de carburant injectée.

— **Vitesse du moteur(Engine Speed)**

→ Résultat final : le moteur tourne plus ou moins vite selon l'air admis.

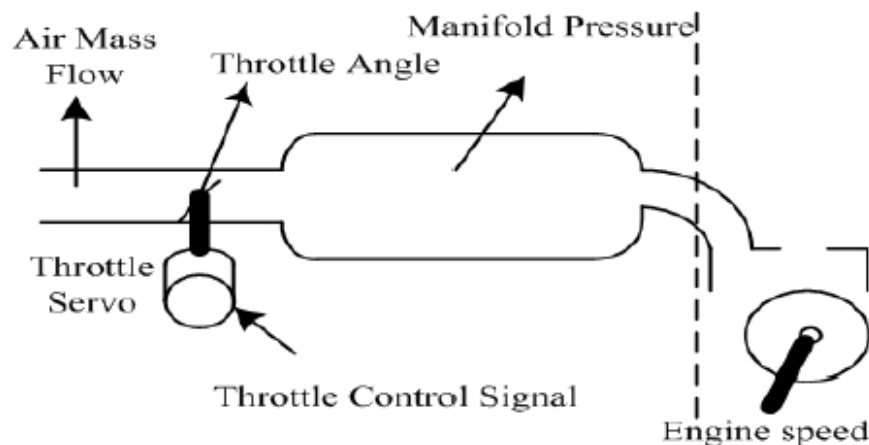


FIGURE III.2 – Système de contrôle électronique du papillon

III.4.1 Fonctionnement du système

La throttle position correspond au degré d'ouverture du papillon des gaz, actionné par un servomoteur dans une configuration maître-esclave. Ce dispositif contrôle le flux d'air entrant dans le moteur, influence la pression dans le collecteur d'admission et agit directement sur la vitesse du moteur. Il permet ainsi une régulation précise du couple moteur et de la vitesse, tout en optimisant la consommation énergétique et en réduisant les émissions.

En fonctionnement, lorsque l'on appuie sur la pédale d'accélérateur, le servomoteur ajuste la position du papillon : plus il est ouvert, plus la demande en puissance est élevée, ce

qui entraîne une augmentation de la vitesse. À l'inverse, lorsque la pédale est relâchée, le papillon se referme, ce qui diminue la vitesse du véhicule. La figure III.2 montre le système de contrôle électronique du papillon.

III.5 Modélisation du véhicule hybride

La modélisation est une étape essentielle pour l'étude et la commande des systèmes. Rappelons que, dans ce travail, on ne s'intéresse pas à l'étape de modélisation, on s'intéresse uniquement à la commande du servo moteur qui ajuste la position de l'accélérateur du véhicule hybride. Notre l'objectif est d'analyser et de tester les performances du contrôleur PID classique et le PID fractionnaire.

Le modèle non linéaire du système est donné par l'équation (III.1)

$$m \frac{dv}{dt} = F_e(\theta) - \alpha_t v^2 - F_g \quad (\text{III.1})$$

$$\tau_e \frac{dF_e(\theta)}{dt} = -F_e(\theta) + F_{e1}(\theta) \quad (\text{III.2})$$

$$F_{e1}(\theta) = F_1 + \gamma_m \sqrt{\theta} \quad (\text{III.3})$$

• Variables

- v : vitesse du véhicule
- θ : position du papillon (commande)
- $F_e(\theta)$: force générée par le moteur

• Paramètres

- $m = 1000 \text{ kg}$: masse du véhicule
- $\alpha_t = 4 \text{ N}/(\text{m/s})^2$: coefficient de traînée aérodynamique
- F_g : force gravitationnelle (30% du poids du véhicule)
- $F_1 = 6400 \text{ N}$: force au ralenti
- $\gamma_m = 12500 \text{ N}$: coefficient de force du moteur
- $\tau_e = 0.2 \text{ s}$: constante de temps du moteur

→ Définition des paramètres

- μ_f : coefficient de frottement pneumatiques/route (sans dimension), typiquement entre 0,01 et 0,02.

- m : masse totale du véhicule (en kg).
- g : accélération de la pesanteur (en m/s^2), $g \approx 9,81$.
- β : angle de la pente (en radians), positif en montée, négatif en descente.
- α_t : coefficient global de traînée aérodynamique (en $\text{N}/(\text{m/s})^2$), englobant

$$\alpha_t = \frac{1}{2} \rho C_d A$$

où

- ρ : densité de l'air (en kg/m^3), $\rho \approx 1,225$.
- C_d : coefficient de traînée.
- A_v : surface frontale du véhicule (en m^2).
- V : vitesse du véhicule (en m/s).
- b_w : coefficient d'amortissement mécanique équivalent au niveau du train roulant (en $\text{N}\cdot\text{s/m}$).
- r_{tire} : rayon du pneumatique (en m).

→ Identifier Les Forces extérieures

• Force motrice (F_e) :

- Force produite par le moteur thermique (ICE)
- Contrôlée par la position du papillon θ (ETCS)
- Sens positif : pousse le véhicule vers l'avant

• Forces résistives (F_{wheel}) :

$$F_{\text{wheel}} = F_{\text{roll}} + F_{\text{drag}} + F_{\text{damp}}$$

- Formule des 3 Forces :

$$F_{\text{roll}} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \beta \quad (\text{frottement pneus/route})$$

$$F_{\text{drag}} = \alpha_t V^2 \quad (\text{résistance aérodynamique})$$

$$F_{\text{damp}} = \frac{b_w V}{r_{\text{tire}}} \quad (\text{frottements mécaniques})$$

- Sens négatif : s'opposent au mouvement

Remarque : ici on prendra pas en compte F_{roll} et F_{damp} ce qui donnera $F_{\text{wheel}} = F_{\text{drag}} = \alpha_t v^2$

- **Force gravitationnelle**

$$F_g = m g \sin(\beta)$$

où

- m = masse du véhicule (kg)
- g = accélération de la pesanteur (9,81 m/s²)
- β = angle de la pente (rad)

III.5.1 Linéarisation autour du Point de Fonctionnement

- Point d'équilibre : $v_0 = 0$
- Variables d'état :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ F_e \end{bmatrix}, \quad u = \theta$$

- **Approximation linéaire**

- À $v = 0$: $\alpha_t v^2 \approx 0$
- Équation (1) devient : $\dot{v} \approx \frac{1}{m} F_e$
- Linéarisation de l'équation (2) :

$$\tau_e \dot{F}_e \approx -F_e + \gamma \cdot \frac{1}{2\sqrt{\theta_0}} \theta$$

- **Dérivation des Matrices d'État**

- Matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & -\frac{1}{\tau_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- Matrice B :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma}{2\sqrt{\theta_0}\tau_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.29 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Calcul de θ_0 :

$$\theta_0 = \left(\frac{\gamma}{2\tau_e B_2} \right)^2 \approx 1.42 \times 10^{-9}$$

— Matrices de sortie :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Justification : Sortie = vitesse v

• **Calcul de la Fonction de Transfert**

— Calcul théorique :

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0.001 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

— Matrice de sortie : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

— Matrice d'entrée : $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.29 \times 10^8 \end{bmatrix}$

— Matrice de transmission directe : $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$$G(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \underbrace{\frac{1}{s(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 0.001 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 8.29 \times 10^8 \end{bmatrix}}_B$$

$$G(s) = \frac{8.29 \times 10^5}{s(s+5)} \tag{III.4}$$

III.5.2 Analyse de la commandabilité et de l'observabilité

— Matrices du système

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.29 \times 10^8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

— **1. Commandabilité**

Matrice de commandabilité $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$:

— Calcul de AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8.29 \times 10^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.29 \times 10^5 \\ -4.145 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

— Matrice $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8.29 \times 10^5 \\ 8.29 \times 10^8 & -4.145 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

— Déterminant :

$$\det(\mathcal{C}) = (0)(-4.145 \times 10^9) - (8.29 \times 10^5)(8.29 \times 10^8) = -6.872 \times 10^{14} \neq 0$$

— Rang : $\text{rang}(\mathcal{C}) = 2 = n$

on a le rang =n=2 alors on peut dire que le système est commandable

— **2. Observabilité**

Matrice d'observabilité $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$:

— Calcul de CA :

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

— Matrice $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

— Déterminant :

$$\det(\mathcal{O}) = (1)(0.001) - (0)(0) = 0.001 \neq 0$$

— Rang : $\text{rang}(\mathcal{O}) = 2 = n$

comme le rang=n=2 on peut dire que système est observable

Remarque :

Le système est observable et commandable, sa fonction de transfert est de second ordre avec un pôle à 0 (intégrateur pur) et un second pôle stable à -5 (assez proche de 0). La présence d'un

pôle à l'origine veut dire que le système intègre en permanence l'erreur, ainsi, si le régulateur n'est pas correctement réglé, cette erreur s'accumule indéfiniment et la sortie peut diverger sans jamais se stabiliser. Le gain (8.29×10^5) est extrêmement élevé, Cela veut dire qu'une petite entrée (ex. : une consigne de 1) peut donner des sorties gigantesques avant stabilisation. Pour toutes ces raisons, on peut conclure que ce système est complexe et très difficile à commander, le contrôleur doit à la fois compenser l'intégrateur et gérer le gain énorme du système.

III.6 Contrôle de la vitesse du véhicule électrique avec un PID classique

Notre objectif est de contrôler la vitesse du véhicule électrique pour qu'elle se comporte comme la fonction idéale de Bode en boucle fermée, en utilisant un PID classique dont les paramètres sont calculés en utilisant une méthode d'optimisation, comme le montre la figure III.3 :

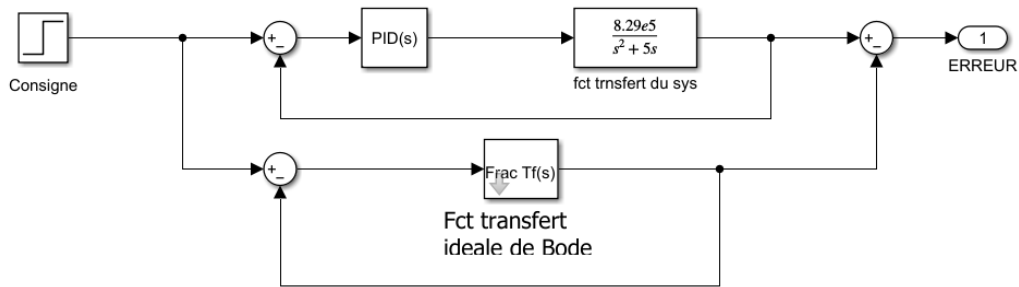


FIGURE III.3 – Schéma de simulation de la commande d'un VE avec un PID

— **Fonction de transfert du système :**

$$G_v(s) = \frac{V(s)}{\theta(s)} = \frac{8.29 \times 10^5}{s(s + 5)}$$

— **Modèle de référence (Bode) :** Le modèle de référence est la fonction idéale de Bode en boucle fermée dont la fonction de transfert est la suivante :

$$T_{\text{ref}}(s) = \frac{1}{1 + (\tau_c)s^{\lambda+1}} \quad (\text{III.5})$$

τ_c et λ sont deux paramètres choisis selon les objectifs de la commande, tel-que λ fixe le dépassement désiré et τ_c fixe la rapidité d'où le temps de réponse désiré. Pour ce système

on prendra $\lambda=0.1$ qui correspond à un dépassement $M_p = 3.5\%$ et $\tau_c=0.1$ qui correspond à un temps de réponse $t_r=0.27s$.

- **Objectifs de conception :**
- **Précision :** Erreur statique nulle
- **Rapidité :** Temps de réponse < 0.5 s
- **Rejet de perturbations :** Taux $> 90\%$

Le contrôleur PID classique est de structure parallèle avec action dérivée filtrée il est donné par l'équation (III.6).

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + \frac{K_d}{N_f} s} \quad (\text{III.6})$$

où :

- $K_c=K_p$: gain proportionnel $k_p = 0.9199 \times 10^{-4}$
- $K_i = \frac{K_c}{T_i}$: gain intégral (T_i = constante de temps intégrale) $k_i = 0.0855 \times 10^{-4}$
- $K_d = K_c \cdot T_d$: gain dérivé (T_d = constante de temps dérivée) $k_d = 0.0633 \times 10^{-4}$
- N_f : facteur de filtrage $N_f = 100$
- $T_p = \frac{K_d}{N_f}$: est la constante de temps du filtre.

Les résultats obtenus avec le contrôleur PID classique sont illustrés sur la figure III.4 et les caractéristiques de la réponse indicielle obtenue sont regroupés dans le tableau III.1. :

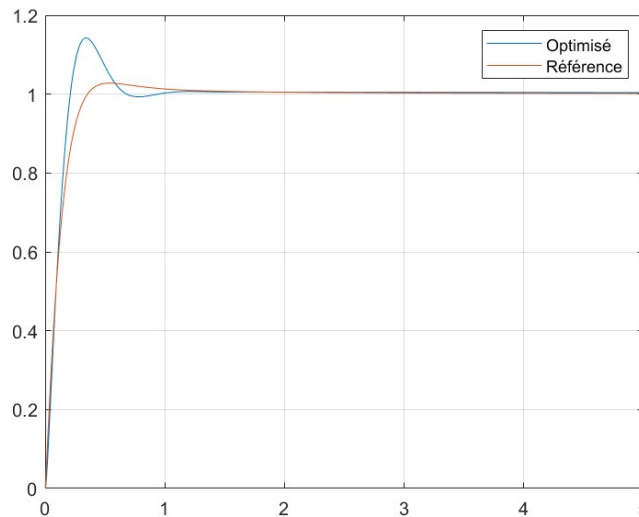


FIGURE III.4 – Réponse indicielle du VE avec le PID classique

Paramètre	Valeur	Description
Temps de montée (t_m)	0.1624	s (de 10% à 90%)
Temps de réponse (t_r)	0.5506	s (à $\pm 5\%$)
Valeur minimale ($t_{r\min}$)	0.9251	après établissement
Valeur maximale ($t_{r\max}$)	1.1408	après établissement
Dépassement ($M_p\%$)	14.0841	%
Dépassement inférieur	0	%
Valeur de pic (y_{peak})	1.1408	
Temps de pic (t_{peak})	0.3519	s

TABLE III.1 – Paramètres de réponse temporelle du système optimisé

Les résultats montrent que le système commandé avec le PID classique suit la dynamique du modèle de référence. En effet, la réponse indicielle est très rapide suit la rapidité du modèle de référence avec un temps de montée ultra rapide égal à 0.16 s. Cependant, le dépassement est de 14% qui est au dessus du dépassement désiré (3.5%) avec absence d'undershoot (oscillations résiduelles limitées).

III.7 Contrôle de la vitesse du véhicule électrique avec un FOPID

Nous allons à présent utiliser le FOPID pour contrôler la vitesse du véhicule électrique avec la fonction idéale de bode comme modèle de référence. La fonction de transfert du contrôleur FOPID (Fractional-Order PID) est donnée par l'équation(III.7) :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s^\beta} + T_d s^\mu \right) \quad (\text{III.7})$$

où :

- K_p : Gain proportionnel
- T_i : Temps intégral
- T_d : Temps dérivé
- β : Ordre de l'intégrateur fractionnaire ($0 < \beta < 1$)
- μ : Ordre du dérivateur fractionnaire ($0 < \mu < 1$)

Le modèle de référence fractionnaire est le même il est donné par l'équation III.5

— τ_c : Constante de temps désirée (0.1s)

— β : Ordre fractionnaire (0.1)

— **Remarque** : On utilisera l'approximation d'oustaloup pour calculer les paramètres fractionnaires du FOPID :

$$s^\alpha \approx K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k}, \quad \alpha \in \{\lambda, \mu\} \quad (\text{III.8})$$

Le schéma de simulation du véhicule électrique contrôlé avec le FOPID est illustré sur la figure III.5

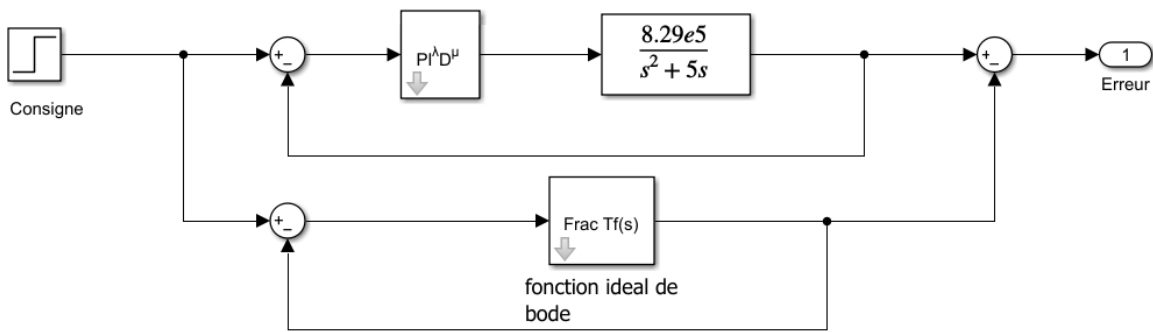


FIGURE III.5 – schéma de simulation avec le FOPID

Après simulation sur matlab on obtient les résultats regroupé dans le tableau III.2

Paramètres FOPID optimaux		Critères de performance temporelle	
Paramètre	Valeur	Critère	Valeur
K_c	5.9838e-05	Temps de montée (t_m)	2.181 s
T_i	5.7345e-06	Temps de réponse (t_r)	0.7356 s
T_d	8.5234e-06	Valeur minimale d'établissement	0.9023
β	0.49888	Valeur maximale d'établissement	1.0377
μ	1	Dépassement (%OS)	3.7736 %
		Sous-pic	0
		Valeur de pic	1.0377
		Temps au pic	0.4922s

TABLE III.2 – Paramètres optimaux du contrôleur FOPID et performances temporelles du système

Les valeurs affichées dans le tableau III.2 nous permettent de voir qu'on a un compromis entre stabilité et rapidité ,une erreur statique quasi nulle avec un Gain proportionnel $K_c = 5.9838e - 05$: Très faible, pour éviter les oscillations, temps intégral $T_i = 5.7345e - 06$: très court, montrant une action intégrale agressive dans le but d'éliminer rapidement l'erreur

statique, temps dérivatif $T_d = 8.5234e - 06$ limitant la sensibilité au bruit haute fréquence.

La figure III.6 montre la réponse la réponse indicielle du véhicule avec le modèle de référence

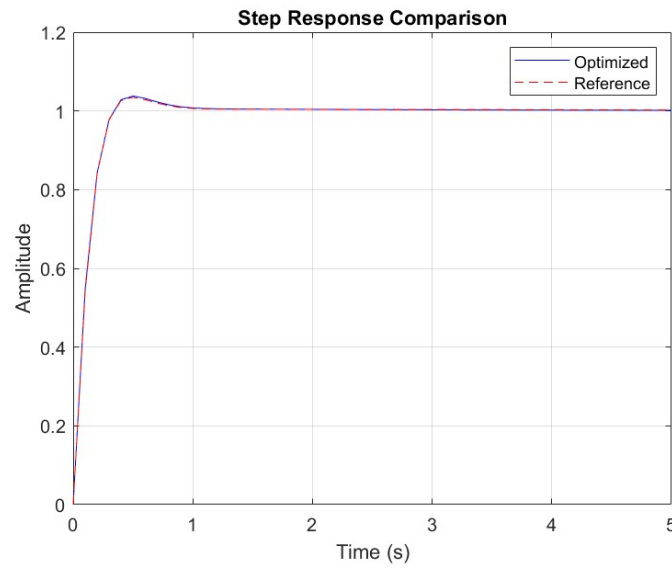


FIGURE III.6 – Réponse indicielle du VE

À partir de la figure III.6 on voit clairement que le système suit parfaitement la référence ce qui veut dire que le FOPID a donné de très bons résultats, on a également un dépassement $< 4\%$ et sans oscillations .

La figure III.7 démontre la supériorité du FOPID par rapport au PID classique ou la réponse du FOPID suit le modèle de référence de façon quasi-parfaite.

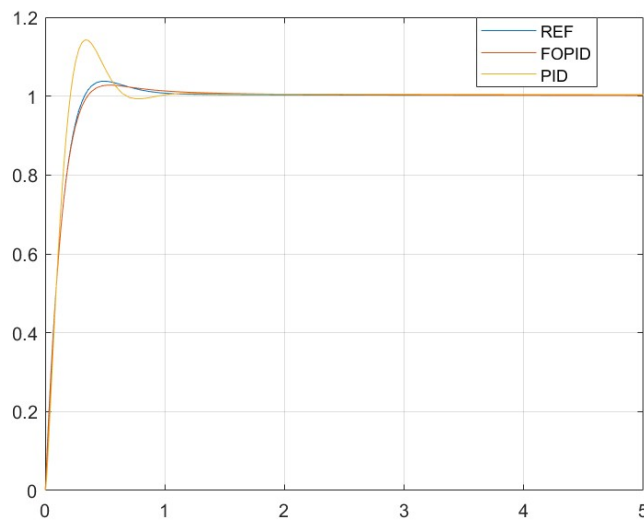


FIGURE III.7 – Comparaison entre le PID et le FOPID avec le modèle de référence

III.8 Test de robustesse

Le test de robustesse sert à tester la capacité d'un système à garder les mêmes performances malgré les perturbations qu'il peut subir. En pratique un modèle mathématique ne peut pas être toujours fidèle à la réalité les paramètres peuvent évoluer dans le temps, des non linéarités peuvent apparaître, même des bruits des imprévus peuvent influencer le comportement du système. La conception d'un système robuste se fait dans le but que ce dernier reste stable et garde des performances acceptable même quand des perturbations surviennent.

La robustesse est donc un facteur clé dans la conception des régulateurs.

Pour tester la robustesse de notre système nous avons ajouter une perturbation de type échelon d'amplitude 0.5 à $t = 5s$.

La figure III.8 montre la réponse indicielle du système commandée avec le FOPID et la figure III.9 montre la réponse du système commandé avec un PID classique en présence de perturbation

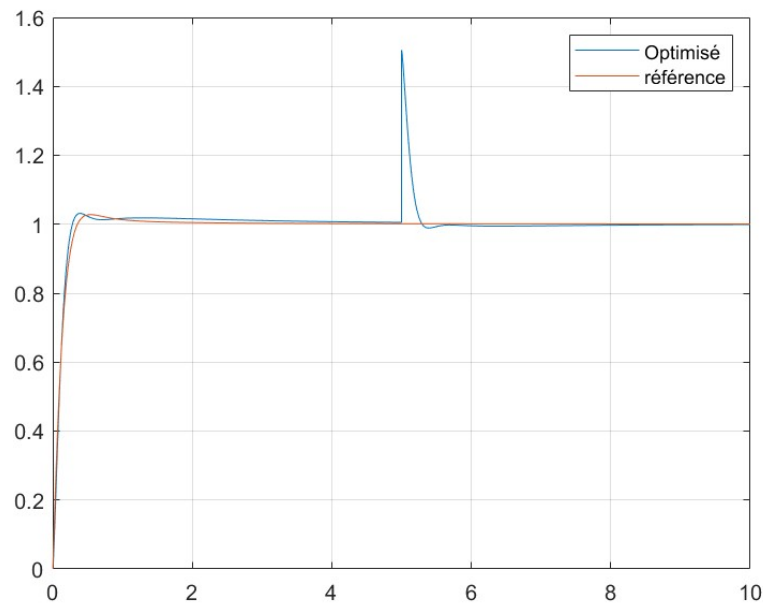


FIGURE III.8 – Réponse du système face à la perturbation avec le FOPID

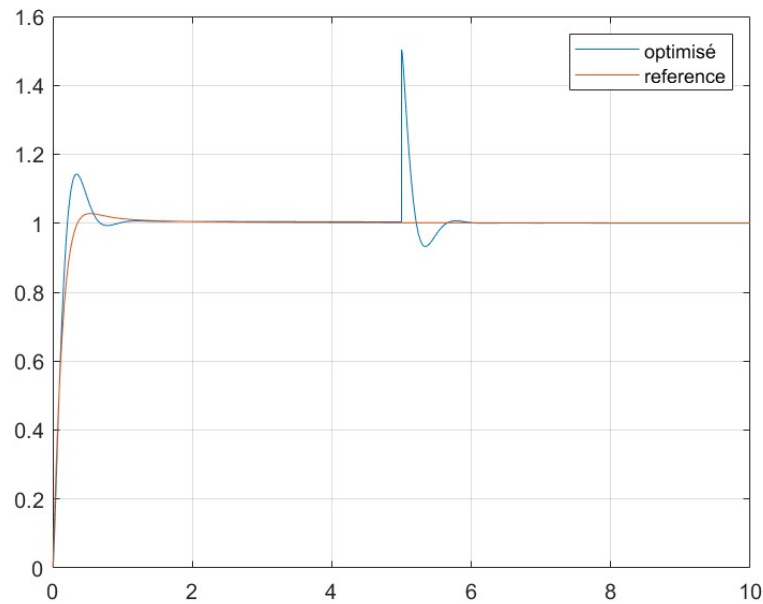


FIGURE III.9 – Réponse du système face à la perturbation avec le PID classique

On peut remarquer qu'à partir de la figure III.8 le système revient à la normale plus doux tandis-que sur la figure III.9 le système oscille violemment mettant un peu plus de temps comparé au cas du FOPID. On peut dire que le FOPID rejette mieux la perturbation.

III.9 Conclusion

Notre but est d'assurer un mouvement fluide de l'accélérateur et éliminer les erreurs de vitesse Plusieurs critères sont à prendre en compte dans la conception des régulateurs comme la réduction des émissions le confort et la sécurité Les véhicules électriques nécessitent une configuration intelligente pour maintenir la vitesse stable. Avec le PID classique on a un dépassement de 14% chose qui n'est pas acceptable par contre avec le FOPID donne des meilleurs résultats un dépassement $<4\%$ et une erreur nulle ce qui signifie que la vitesse est transmise complètement et rejette mieux les perturbations externes Le seul point fort du PID dans notre cas est la réactivité mais ce n'est pas suffisant pour concurrencer le FOPID. On peut choisir le PID classique pour des configurations simple qui ne nécessitent pas l'importance de précision ou de réaction douces, des gains modérée, des systèmes déjà stable le FOPID lui est utilisé pour des systèmes plus exigeant en stabilité, une précision plus extrême et une réaction ultra douce et silencieuse, une adaptation en temps réel des perturbations ,les systèmes a effet mémoires longues et qui régule la consommation d'énergie Le FOPID est l'avenir de l'automatisme surtout quand on est limiter avec le PID.

Conclusion Générale

L'objectif principal de ce travail est la synthèse d'une commande robuste par rapport aux perturbations et aux incertitudes du modèle. Pour cela, nous avons opté pour les contrôleurs d'ordres fractionnaires dont les paramètres sont réglés en utilisant les méthodes d'optimisations. Afin de garantir la robustesse de ces contrôleurs nous avons imposé un comportement similaire à celui de la fonction idéale de Bode, connue par ses caractéristiques de robustesse insensibles à la variation du gain.

En préambule, nous avons présenté des notions de base sur les systèmes d'ordre fractionnaire, la simulation de ce type de systèmes passe nécessairement par l'approximation du dérivateur généralisé en utilisant les méthodes d'approximations connues, dans notre cas nous avons opté pour la méthode d'Oustaloup. L'étude de la fonction idéale de bode a permis de mettre en évidence ses caractéristiques intéressantes de point de vue robustesse. En effet, en boucle fermée son comportement est similaire à celui d'un second ordre amorti dont le dépassement ne dépend que de l'ordre non entier, il reste constant insensible à la variation du gain.

Par la suite, l'étude des contrôleurs PID et FOPID a ouvert une grande porte vers les techniques de régulation, sa simplicité et sa fréquente utilisation font du PID le régulateur préféré de tous les automaticiens. Malgré cela, il reste un contrôleur limité face aux systèmes complexes. Le contrôleur FOPID est une généralisation du contrôleur PID classique au domaine fractionnaire, avec ses deux nouveaux paramètres fractionnaires (β et μ), il offre deux degrés de liberté supplémentaires, ce qui permet d'avoir une grande flexibilité et une meilleure capacité d'ajustement, particulièrement s'il est combiné à des méthodes d'optimisation.

Pour finir, l'application de ces connaissances pour contrôler la vitesse d'un véhicule a concrètement montré la supériorité du contrôleur FOPID par rapport au PID classique. En effet, après simulation, les résultats montrent qu'avec le PID classique on a des résultats modestes, tandis que le FOPID montre des performances supérieures en précision, rapidité et robustesse aussi bien dans la poursuite de la référence que dans le rejet de perturbation.

Pour conclure, ce mémoire démontre que les approches fractionnaires et la fonction idéale de Bode ont leur place ancrée dans la conception des régulateurs et reste une avancée significative pour les systèmes de commandes modernes. Dans le contexte de contrôle des véhicules, cette méthode offre des solutions de commandes plus sûres et répond mieux aux exigences croissantes de performances.

Dans le futur, d'autres pistes sont à envisagée : ouvrir la voie vers des travaux plus compliqués pour des modèles plus difficiles, explorer des méthodes d'optimisation intelligente (algorithme évolué, L'IA) où bien, combiner entre réseaux de neurones qui est un système intelligent et contrôleurs fractionnaires. Ainsi que l'implémentation en temps réel sur des plateformes embarquées afin de valider expérimentalement les résultats obtenus par simulation.

Bibliographie

- [1] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. Geophysical Journal International, 13(5), 529–539.
- [2] Charef, A. (1992). Analogue realisation of fractional-order integrator. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 39(9), 789–792.
- [3] Charef, A. (2006). Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional PID controller. IET Control Theory & Applications, 153(6), 714–722.
- [4] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier.
- [5] Mainardi, F. (2010). Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. World Scientific.
- [6] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu, V. (2010). Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications. Springer.
- [7] Ogata, K. (2010). Modern Control Engineering (5th ed.). Prentice Hall.
- [8] Oustaloup, A., Mathieu, B., & Lanusse, P. (1995). The CRONE control of resonant plants : Application to a flexible transmission. European Journal of Control, 1(2), 113–121.
- [9] Petráš, I. (2011). Fractional-Order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis and Simulation. Springer.
- [10] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press.
- [11] Bode, H. W. (1945). Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand.
- [12] Valério, D., & Sá da Costa, J. (2013). An Introduction to Fractional Control. IET

- [13] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu, V. (2010). Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications. Springer.
- [14] Chen, Y., & Moore, K. L. (2003). Discretization schemes for fractional-order differentiators and integrators. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 49(3), 363–367.
- [15] Valério, D., & Sá da Costa, J. (2013). An Introduction to Fractional Control. IET.
- [16] Wikipédia. *Régulateur PID* — *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. [En ligne]. Disponible sur : https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9gulateur_PID
- [17] Définition et usages de ITAE. *Ijee.ie*. <https://www.ijee.ie/articles/Vol21-5/Ijee1673.pdf>
- [18]
- [19] fmincon - Find minimum of constrained nonlinear multivariable function - MATLAB. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>
- [20] Choosing the Algorithm - MATLAB & Simulink. <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/choosing-the-algorithm.html>
- [21] MathWorks, *fminsearch - Find minimum of unconstrained multivariable function*, Documentation MATLAB. Disponible sur : <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html>.
- [22] Lagarias, J.C., Reeds, J.A., Wright, M.H., & Wright, P.E. (1998). *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*. SIAM Journal on Optimization, 9(1), 112–147.
- [23] Cohen, G.H. et Coon G.A. (1953). Theoretical consideration of retarded control. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 75, pp. 827–834.
- [24] Shamsuzzoha M. & Skogestad S. (2010). *The setpoint overshoot method : A simple and fast closed-loop approach for PID tuning*. Journal of Process Control, vol. 20, pp. 1220–1234.
- [25] Shamsuzzoha M., Moonyong L. & Hirya S. (2012). *Closed loop PI/PID Controller Tuning for Stable and Unstable Processes*. In : *America Control Conference*, Fairmont Queen Elizabeth, June 27–29, Montreal, Canada.

- [26] Ziegler J.G. & Nichols N.B. (1942). *Optimum settings for automatic controllers*. Transactions of the ASME, vol. 64, pp. 759–768.
- [27] AMOURA, Karima. *Contribution à la synthèse de contrôleurs fractionnaires d'ordre réduit pour la commande des systèmes de grande dimension*. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (UMMTO), 2018.
- [28] GARCIA, C. E. & MORARI, M. Internal model control I. A unifying review and some new results. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, 1982, vol. 21, no 2, p. 308–323.
- [29] Oustaloup, A. (1995). *La dérivation non entière : Théorie, Synthèse et Application*. Éditions Hermes, Paris.
- [30] Nelder, J.A., Mead, R. (1965). *A simplex method for function minimization*. Computer Journal, 7(4), pp. 308–313.
- [31] R. S. Barbosa, J. A. Tenreiro Machado, and I. M. Ferreira. *Tuning of PID Controllers Based on Bode's Ideal Transfer Function*. Nonlinear Dynamics, vol. 385, pp. 305–321, 2004.
- [32] MathWorks, *fmincon - Constrained Nonlinear Optimization*, Documentation MATLAB, 2023. Algorithm : 'sqp' (Sequential Quadratic Programming).
- [33] Boggs, P. T., & Tolle, J. W. (1995). *Sequential Quadratic Programming*. Acta Numerica, 4, 1–51.
- [34] Desborough, L. et Miller, R., (2002). *Increasing customer value of industrial control performance monitoring-Honeywell's experience*. AICHE symposium series, New York ; American Institute of Chemical Engineers, pp. 169-189.
- [35] Liu, L., Wang, Z., & Zhang, H. (2017). A multi-objective optimization method for fractional order PID controller based on robustness and performance indices. *ISA Transactions*, 72, 256–267.
- [36] Zhao, C., Xue, D., & Chen, Y. Q. (2005). *A Fractional Order PID Tuning Algorithm for a Class of Fractional Order Plants*. In International Conference on Mechatronics and Automation (pp. 216-221). Niagara, Canada.

- [37] Liu, L., Wang, Z., & Zhang, H. (2017). A multi-objective optimization method for fractional order PID controller based on robustness and performance indices. *ISA Transactions*, 72, 256–267.